Cours de Mathématiques

Chapitre n° 5 : Le théorème de Pythagore

Niveau : Quatrième

Année scolaire

2023 - 2024

Notions abordées :

- Théorème de Pythagore,
- Application aux calculs de longueurs dans un triangle rectangle.

Compétences évaluées :

- Utiliser les carrés parfaits de 1 à 144,
- Connaître la définition de la racine carrée d'un nombre positif,
- Encadrer la racine carrée d'un nombre positif entre deux entiers consécutifs,
- Utiliser la racine carrée d'un nombre positif en lien avec des situations géométriques,
- Utiliser le théorème de Pythagore,
- Mobiliser ses connaissances sur les figures pour déterminer des grandeurs géométriques,
- Mener des raisonnements en utilisant les propriétés des figures et les configurations.

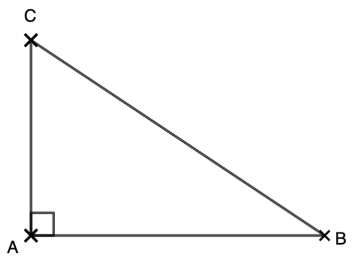
Chapitre n° 5 : Le théorème de Pythagore

Table des matières

Chapitre n° 5 : Le théorème de Pythagore

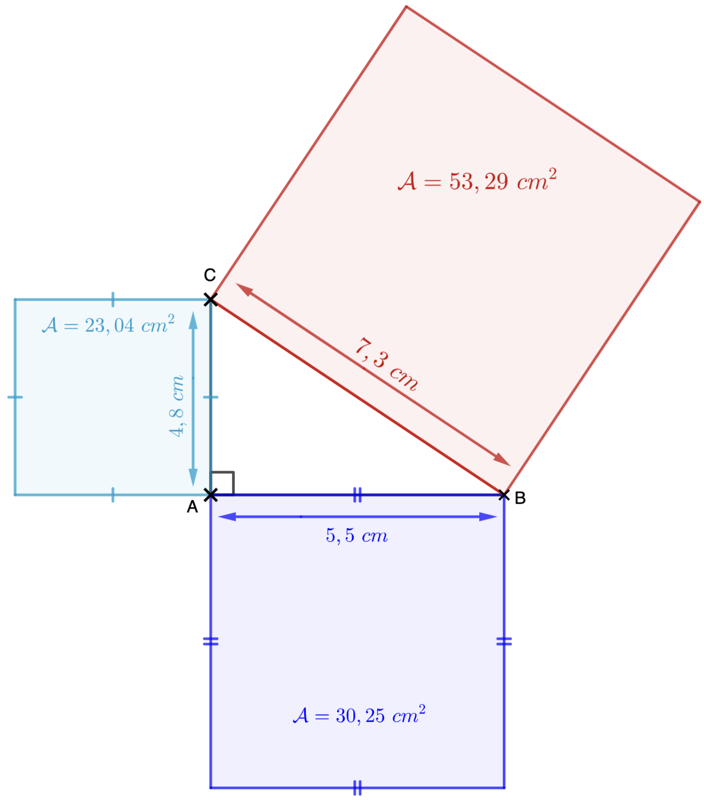
Introduction

1) Tracer un triangle ABC rectangle en A



2) Tracer le carré associé à chacun des côtés du triangle

3) Calculer l'aire de chacun des carrés obtenus



► Que remarque-t-on ?

On remarque que l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés.

C'est-à-dire : $53,29 = 30,25 + 23,04$

$$7,3^2 = 5,5^2 + 4,8^2$$

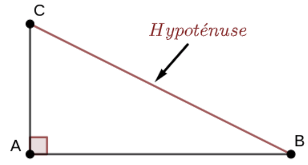
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Il s'agit là du théorème de Pythagore !

I Vocabulaire

Définition :

Dans un triangle rectangle, on appelle hypoténuse le côté opposé à l'angle droit.



REMARQUE

L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus long côté de ce triangle.

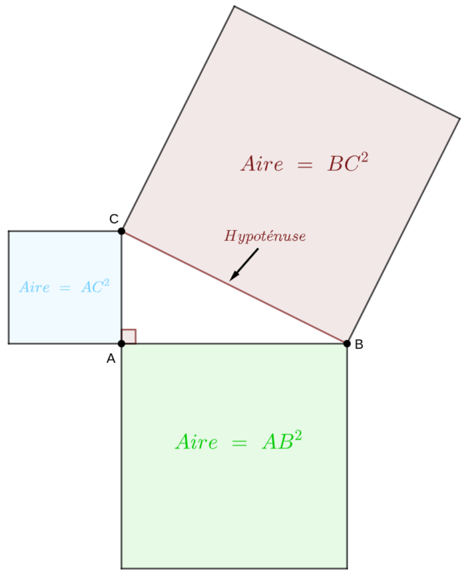
II Théorème de Pythagore

THÉORÈME

Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse.

Dans ce triangle ABC rectangle en A on a :

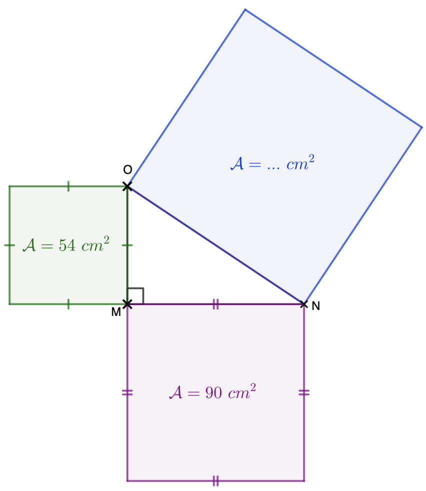
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$



APPLICATIONS

Dans chaque cas, déterminer l'aire manquante et en déduire la longueur des côtés du carré.

1)



Le triangle MON est rectangle en M.

D'après le théorème de Pythagore l'aire bleue est de

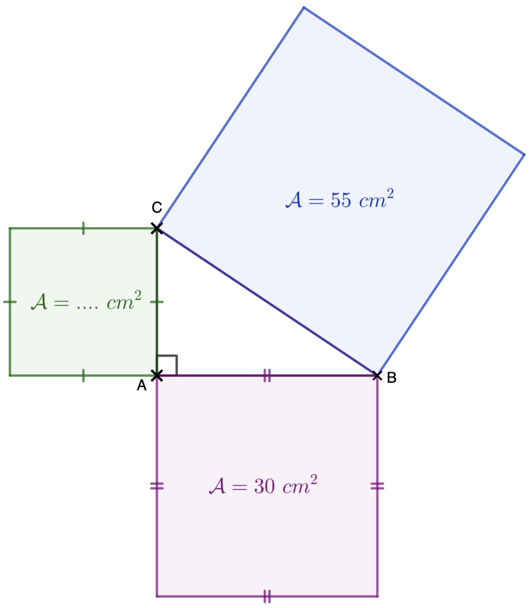
$$54\ cm^2 \quad + \quad 90\ cm^2 \quad = \quad 144\ cm^2$$

$$(MO^2 \quad + \quad MN^2 \quad = \quad ON^2)$$

Donc : $ON = \sqrt{144} = 12\ cm$

Applications (suite)

2)



Le triangle ABC est rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{array}{lcccl} AB^2 & + & AC^2 & = & BC^2 \\ 30 & + & AC^2 & = & 55 \end{array}$$

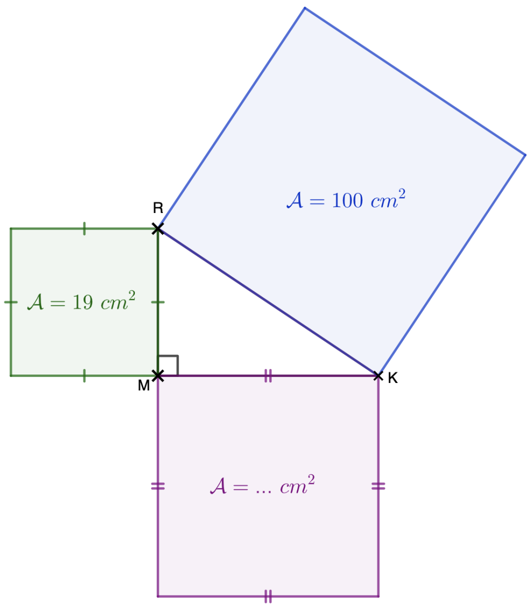
<u>Donc :</u>

$$\begin{array}{rcl} AC^2 & = & 55 - 30 \\ AC^2 & = & 25 \end{array}$$

L'aire du carré vert est de 55 cm^2.

<u>Donc :</u> $AC = \sqrt{25} = 5\ cm$

3)



Le triangle MRK est rectangle en M.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{array}{lcccl} MK^2 & + & MR^2 & = & RK^2 \\ 19 & + & MR^2 & = & 100 \end{array}$$

<u>Donc :</u>

$$\begin{array}{rcl} MR^2 & = & 100 - 19 \\ MR^2 & = & 81 \end{array}$$

L'aire du carré violet est de 81 cm^2.

<u>Donc :</u> $MR = \sqrt{81} = 9\ cm$

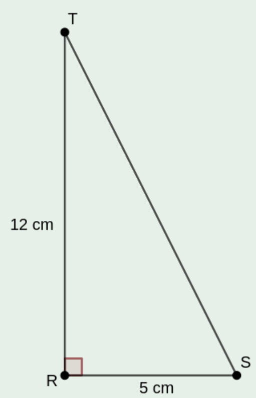
Exemple

Déterminer la longueur ST dans le triangle RST.

Le triangle RST est rectangle en R, le théorème de Pythagore s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} TS^2 & = & RS^2 + RT^2 \\ TS^2 & = & 5^2 + 12^2 \\ TS^2 & = & 25 + 124 \\ TS^2 & = & 169 \end{array}$$

Comme TS est une longueur, $TS > 0$ donc $TS = \sqrt{169} = 13\ cm$.



Remarque

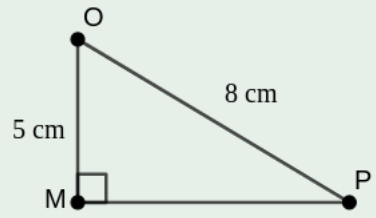
Dans l'exemple précédent, on précise que TS est une longueur car il existe deux nombres dont le carré est 169 (13 et -13) et qu'il n'est possible de prendre la racine carrée que d'un nombre positif.

Exemple

Déterminer la longueur MP dans le triangle MOP.

Le triangle MOP est rectangle en M, le théorème de Pythagore s'écrit :

$$\begin{aligned} OP^2 &= MO^2 + MP^2 \\ 8^2 &= 5^2 + MP^2 \\ 64 &= 25 + MP^2 \\ MP^2 &= 64 - 25 \\ MP^2 &= 39 \end{aligned}$$



Comme MP est une longueur, $MP > 0$ donc $MP = \sqrt{39} \simeq 6,2\ cm$.

Remarque

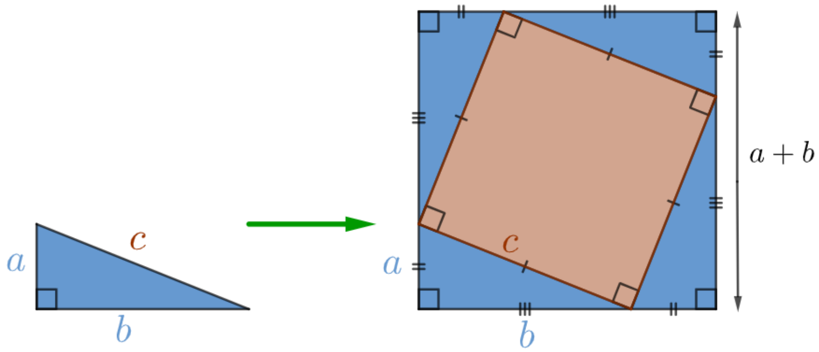
Dans l'exemple précédent, on ne peut donner qu'une valeur approchée de la longueur MP.

Démonstration.

Soit a, b et c des nombres strictement positifs.

On considère le triangle rectangle bleu ci-contre.

À partir de 4 de ces triangles bleus, on obtient un premier grand carré de côté $a + b$.

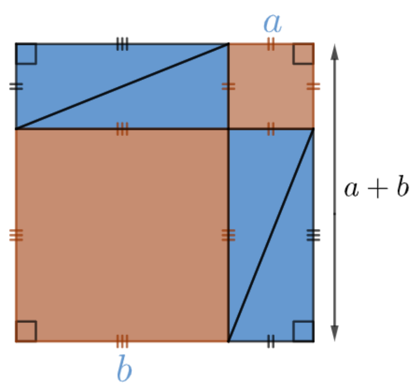


À partir des propriétés sur la somme des mesures des angles d'un triangle, on en déduit que la figure centrale est un carré de côté c.

Ce premier carré rouge a une aire de c^2.

$$\mathscr{A}_{\text{grand carré}} = 4 \times \mathscr{A}_{\text{triangle}} + c^2$$

Maintenant nous plaçons les 4 triangles bleus comme sur cette figure.



On la complète par ces deux carrés rouges afin d'obtenir un grand carré de côté $a + b$.

Ces deux carrés rouges ont une aire respectives de a^2 et b^2.

$$\mathscr{A}_{\text{grand carré}} = 4 \times \mathscr{A}_{\text{triangle}} + a^2 + b^2$$

$$\boxed{\underline{\text{Ainsi :}} \quad c^2 = a^2 + b^2}$$