Cours de Mathématiques

Chapitre n° 5 : Périmètres et Aires

Niveau : Sixième (Rappels) et Cinquième

Année scolaire

2023 - 2024

Notions abordées :

— Périmètres et aires ;

— Formules usuelles ;

— Conversions.

Compétences évaluées :

— Calculer le périmètre d'une figure ;

— Calculer l'aire d'une figure ;

— Effectuer des conversions d'unités ;

— Calculer l'aire d'un assemblage de figures.

Chapitre n° 5 : Périmètres et Aires

Table des matières

I Définitions **2**
1 Polygones 2
2 Cercle 2

II Périmètres **3**

III Aires **4**
1 Introduction 4
2 Définition 5
3 Disque 5
4 Formules usuelles 5

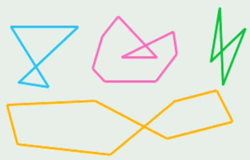
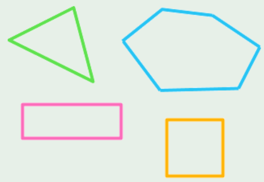
Chapitre n° 5 : Périmètres et Aires

I Définitions

1 Polygones

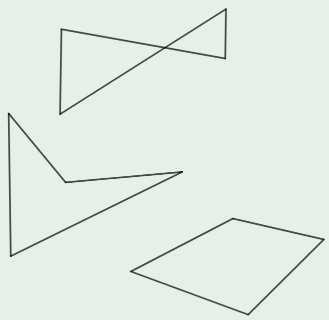
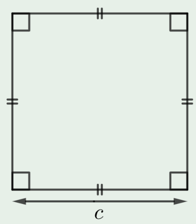
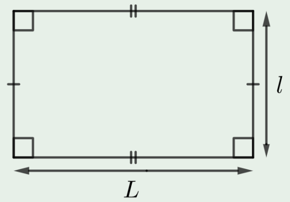
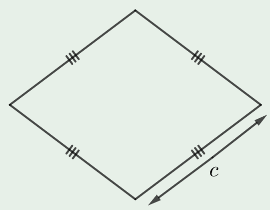
Définition : *Polygone*
Un polygone est une figure géométrique plane formée d'une ligne brisée (ou ligne polygonale) **fermée**.

Exemples.

Polygones croisés	Polygones non croisés
	

Définitions :
Un triangle est un polygone à trois côtés.
Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés.

Exemples.

Quadrilatères quelconques	Quadrilatères particuliers		
	Carré	Rectangle	Losange
			

2 Cercle

Définition : *Cercle*
Un cerlce est définit par un **centre** (un point) et un **rayon** (un nombre positif).

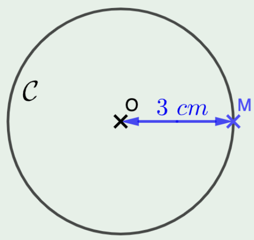
Un cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tel que :

$$OM = r$$

Exemple.
Voici un cercle $\mathcal{C}$, de centre O et de rayon 3 cm.

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des points se trouvant à 3 cm du centre O.

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M tels que $OM = 3$ cm.



II Périmètres

Définition : *Périmètre*

Le périmètre d'une figure est la longueur du contour de cette figure.

On exprime le périmètre d'une figure en **mètre**, avec ses multiples et ses sous-multiples.

Multiples			**Unité**	**Sous-multiples**		
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	4	7	5	2		

Une longueur inscrite dans un tableau se lit de plusieurs façons :

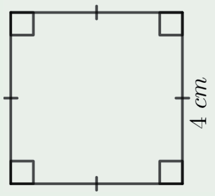
$$4\ 752\ dm \;=\; 4,752\ hm \;=\; 475,2\ m \;=\; 47,52\ dam \;=\; 0,4\ 752\ km$$

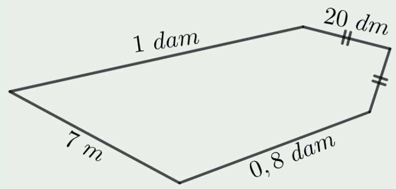
Ainsi on a :

$1\ km = 1000\ m$	$1\ m = 0,001\ km$	$1\ dm = 0,1\ m$	$1\ m = 10\ dm$
$1\ hm = 100\ m$	$1\ m = 0,01\ hm$	$1\ cm = 0,01\ m$	$1\ m = 100\ cm$
$1\ dam = 10\ m$	$1\ m = 0,1\ dam$	$1\ mm = 0,001\ m$	$1\ m = 1000\ mm$

Remarque : Avant de calculer le périmètre d'une figure il faut, si besoin, convertir toutes les mesures dans une même unité de longueur.

EXEMPLES.





$$\mathscr{P}_1 = 4 \times 4cm$$
$$\mathscr{P}_1 = 16cm$$

$$\mathscr{P}_2 = 7m + 0,8dm + 20dm + 20dm + 1dam$$
$$\mathscr{P}_2 = 7m + 8m + 2m + 2m + 10m$$
$$\mathscr{P}_2 = 29m$$

PROPRIÉTÉ. (admise)

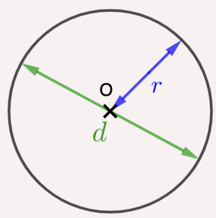
Le périmètre d'un cercle de rayon r est :

$$\mathscr{P} = 2 \times \pi \times r = 2\pi r$$

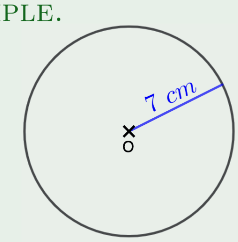
Si on note d le diamètre de ce cercle alors :

$$\mathscr{P} = \pi \times d$$

Avec $\pi \simeq 3,141593$



EXEMPLE.

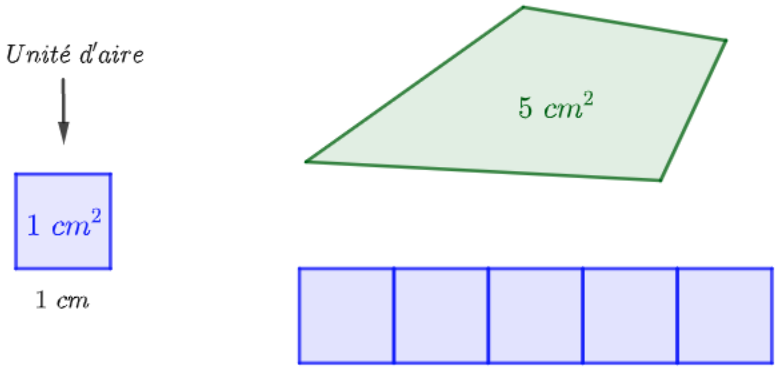


$$\mathscr{P} = \pi \times 2 \times 7\ cm$$
$$\mathscr{P} = 14\pi\ cm$$
$$\mathscr{P} \simeq 44cm$$

Remarque : Le périmètre d'un cercle est également appelé circonférence.

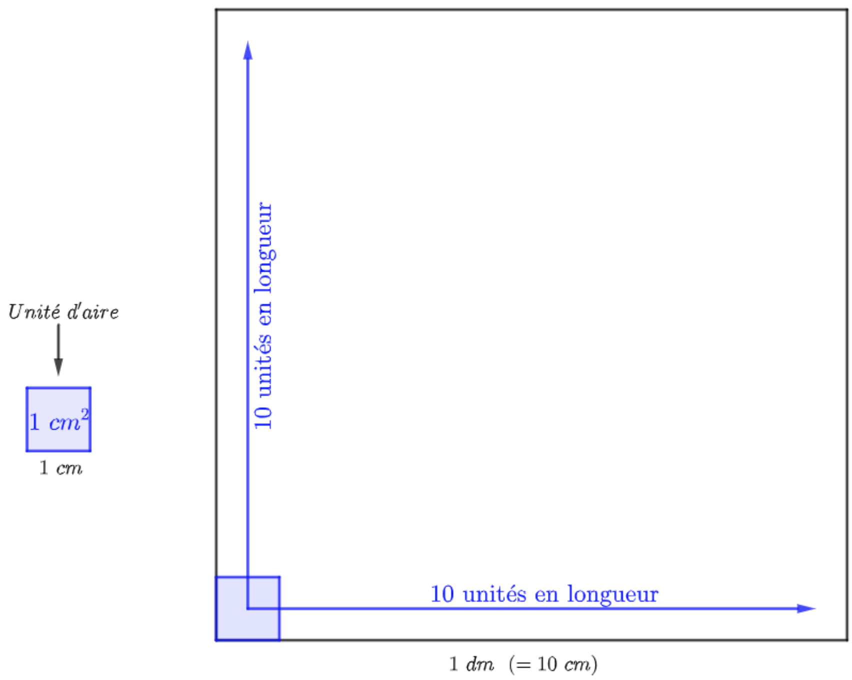
III Aires

1 Introduction



Ci-dessous, on considère un petit carré bleu de côté 1 cm.
Il occupe une certaine place sur la feuille
Ce petit carré sera une unité d'aire : 1 cm^2.

Dire que la figure verte a une aire de 5 cm^2 signifie qu'elle occupe la même place sur la feuille que 5 petits carrés de côté 1 cm.



On considère maintenant un plus grand carré, de côté 10 cm.
Sur la longueur, nous pouvons mettre 10 unités d'aires. De même sur la largeur.
On peut donc mettre $10 \times 10 = 100$ unités d'aire dans ce grand carré.

Ce grand carré occupe lui aussi une place sur la feuille, on dit qu'il a une aire de 1 dm^2.
Ainsi : 1 dm^2 = 100 cm^2

2 Définition

Définition : *Aire*

L'aire d'une figure correspond à la mesure de la surface délimitée par cette figure.

On exprime l'aire d'une figure en **mètre carré**, avec ses multiples et ses sous-multiples.

<table>
<tr><th colspan="6">Multiples</th><th colspan="2">Unité</th><th colspan="6">Sous-multiples</th></tr>
<tr><td colspan="2">km^2</td><td colspan="2">hm^2</td><td colspan="2">dam^2</td><td colspan="2">m^2</td><td colspan="2">dm^2</td><td colspan="2">cm^2</td><td colspan="2">mm^2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ha</td><td></td><td>a</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

À savoir : 1 are (a) = 100 m^2 et 1 hectare (ha) = 10 000 m^2

Une longueur inscrite dans un tableau se lit de plusieurs façons :

$$14\ 623\ m^2 = 146,23\ dam^2 = 1,462\ 3\ ha = 1\ 462\ 300\ dm^2$$

Ainsi on a :

$1\ km^2 = 1\ 000\ 000\ m^2$ $\quad$ $1\ m = 0,000\ 000\ 1\ km^2$ $\quad$ $1\ cm^2 = 0,000\ 1\ m^2$

$1\ dam^2 = 100\ m^2$ $\quad$ $10\ m^2 = 0,001\ hm^2$ $\quad$ $1\ km^2 = 100\ ha$

3 Disque

Définition : *Disque*

Un disque est défini par un **centre** (un point) et un **rayon** (un nombre positif).

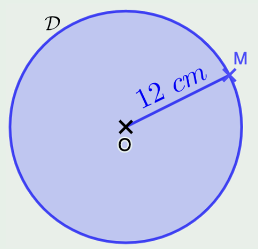
Un cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tel que :

$$OM \leq r$$

Exemple.

Voici un Disque $\mathcal{D}$, de centre O et de rayon 12 cm.

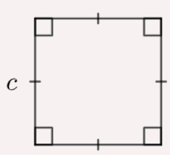
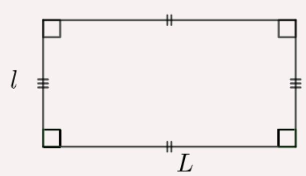
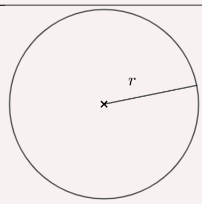
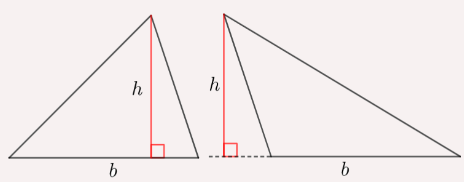
$\mathcal{D}$ est l'ensemble des points se trouvant à 12 cm **ou moins** du centre O.



$\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que $OM \leq 12\ cm$.

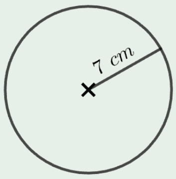
4 Formules usuelles

Propriété. (admise)

Carré	Rectangle	Disque	Triangle
			
$\mathscr{A} = c^2$	$\mathscr{A} = L \times l$	$\mathscr{A} = \pi \times r^2$	$\mathscr{A} = \dfrac{b \times h}{2}$

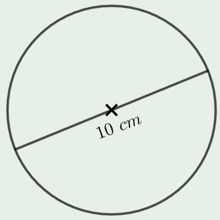
Exemples.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \pi \times r \times r\\ \mathscr{A} &= \pi \times 7 \times 7\\ \mathscr{A} &= 49\pi\\ \mathscr{A} &\simeq 153,9\ cm^2\end{aligned}$$



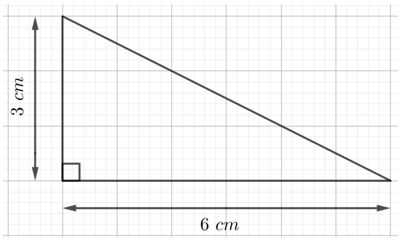
Attention : $r = 10\ cm \div 2 = 5\ cm$

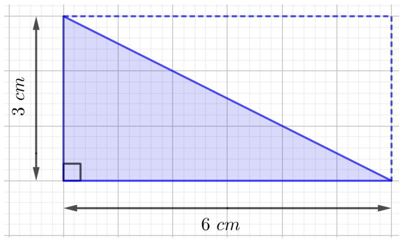
$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \pi \times r \times r\\ \mathscr{A} &= \pi \times 5 \times 5\\ \mathscr{A} &= 25\pi\\ \mathscr{A} &\simeq 78,5\ cm^2\end{aligned}$$



Aire d'un triangle rectangle

Pour déterminer l'aire de ce triangle rectangle, on le considère comme étant la moitié d'un rectangle

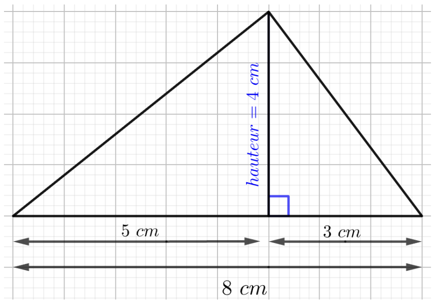


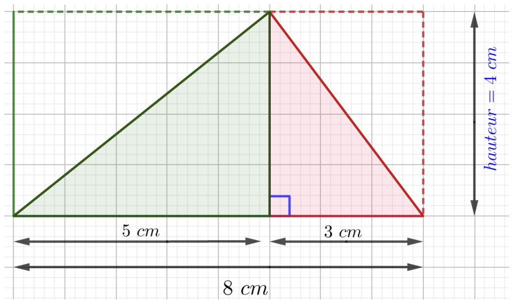


Ainsi : $\mathscr{A} = \dfrac{6\ cm \times 3\ cm}{2} = \dfrac{18\ cm^2}{2} = 9\ cm^2$

Aire d'un triangle

Pour déterminer l'aire du triangle ci-dessous, on choisit un de ces côtés comme base (ici celui de 8 cm). On construit sa hauteur, elle mesure 4 cm.





On découpe ce triangle en deux triangles rectangles (de chaque côté de la hauteur).

Ainsi :

$$\mathscr{A}_{verte} = \frac{5\ cm \times 4\ cm}{2} = \frac{20\ cm^2}{2} = 10\ cm^2 \qquad \mathscr{A}_{rouge} = \frac{3\ cm \times 4\ cm}{2} = \frac{12\ cm^2}{2} = 6\ cm^2$$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{totale} &= \mathscr{A}_{verte} + \mathscr{A}_{rouge}\\ &= 10\ cm^2 + 6\ cm^2\\ &= 16\ cm^2\end{aligned}$$

Cela revient à la formule $\dfrac{base \times hauteur}{2}$, en effet la base étant de 8 cm et la hauteur de 4 cm :

$$\mathscr{A}_{verte} + \mathscr{A}_{rouge} = \frac{5\ cm \times 4\ cm}{2} + \frac{3\ cm \times 4\ cm}{2} \overset{factorisation\ par\ 4}{=} \frac{(5\ cm + 3\ cm) \times 4}{2} = 16\ cm^2$$