Cours de Mathématiques

Chapitre n° 9 : Calcul littéral

Niveau : Cinquième

Année scolaire

2023 - 2024

Notions abordées :

— Expression littérale, simplification d'écriture ;
— Substitution ;
— Tester une égalité ;
— Distributivité simple, développement, factorisation et réduction.

Compétences évaluées :

— Identifier la structure d'une expression littérale,
— Substitution dans une expression littérale,
— Connaître les propriétés de distributivités,
— Développer, factoriser et réduire une expression littérale,

Chapitre n° 9 : Calcul littéral

Table des matières

Chapitre n° 9 : Calcul littéral

Introduction

Histoire et étymologie

Littéral : est un adjectif signifiant : *qui utilise les lettres*.
Le calcul littéral, aussi appelé calcul algébrique, permet de donner des résultats généraux en utilisant des lettres, contrairement au calcul numérique qui lui donne un résultat particulier.

☞ Dans ce chapitre nous allons découvrir le calcul littéral : définitions et propriétés, et nous allons apprendre à les manipuler.

Dans un futur chapitre, nous verrons comment l'utiliser afin de faire des *démonstrations*.

I Expression littérale

Définition :
Une expression littérale est une expression mathématique contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres.
On appelle ces lettres des variables.

Exemples.
Les formules de périmètres et d'aires sont des expressions littérales :

- Circonférence d'un cercle de rayon r : $\mathscr{P} = 2 \times r \times \pi = 2\pi r$
- Aire d'un carré de côté c : $\mathscr{A} = c \times c = c^2$

$3x + 25$ et $5y - 8z + 10$ sont des expressions littérales.

Propriété. *Simplification*
On peut simplifier l'écriture d'une expression littérale en supprimant le signe $\times$ entre :
- un nombre et une lettre,
- deux lettres,
- une lettre et des parenthèses,
- un nombre et des parenthèses.

Exemples.
$12 \times x = 12x$ $\quad 4 - 7 \times x + 3 \times y = 4 - 7x + 3y$ $\quad 5 \times y \times z = 5yz$

$4 \times (x + 2) = 4(x + 2)$ et se lit : « 4 **facteur de** $(x + 2)$ ».

$z \times (3 - x) = z(3 - x)$ et se lit : « z **facteur de** $(3 - x)$ ».

Remarque
Pour $1 \times a$, , c'est-à-dire $1a$ on écrit tout simplement a.

II Substitution

Définition :

La substitution consiste à remplacer une lettre dans une expression littérale par un nombre.

EXEMPLE.

Lorsque l'on calcul l'aire d'un disque, on effectue une substitution :

Aire d'un disque de rayon 5 cm :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \pi \times r \times r \\ \mathscr{A} &= \pi \times 5 \times 5 \quad \leftarrow \text{On vient de substituer } r \text{ par } 5 \\ \mathscr{A} &= 25\pi\ cm^2 \\ \mathscr{A} &\simeq 75,5cm^2\end{aligned}$$

REMARQUE

Lorsque l'on remplace une lettre par un nombre, on écrit de nouveau les signe $\times$ qui sont simplifiés.

EXEMPLES. Calculons la valeur de $R = 2x + 5 - 4x - 1$ pour $x = 3$.

$$\begin{aligned}R &= 2x + 5 - 4x - 1 \\ R &= 2 \times 3 + 5 - 4 \times 3 - 1 \\ R &= 6 + 5 - 12 - 1 \\ R &= -2\end{aligned}$$

Calculons la valeur de $S = 10 - 2t + 8 + 3a + 10t - 6a - 20$ pour $t = 2$ et $a = 5$.

$$\begin{aligned}S &= 10 - 2t + 8 + 3a + 10t - 6a - 20 \\ S &= 10 - 2 \times 2 + 8 + 3 \times 5 + 10 \times 2 - 6 \times 5 - 20 \\ S &= 10 - 4 + 8 + 15 + 20 - 30 - 20 \\ S &= -1\end{aligned}$$

III Égalité

1 Définition

Définition :

Une égalité est une expression mathématiques comportant le signe $=$.

Elle comporte deux membres.

REMARQUE

Certaines égalités sont vraies, d'autres sont fausses.

EXEMPLES.

$\underbrace{3 \times 10}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{12 + 18}_{\text{membre de droite}} \rightarrow$ Égalité vraie.

$4 + 9 = 40 \div 20 \rightarrow$ Égalité fausse.

2 Tester une égalité

On peut écrire des égalités avec des expressions littérales.
Il est alors possible de tester ces égalités en faisant de la substitution.

Méthode

1) On substitue **séparément** dans le membre de gauche et le membre de droite.
2) On comparer les deux résultats obtenus et on conclut.

Exemples.

$$5x+3 = 7x-5 \quad (E_1)$$

▶ Tester l'égalité (E_1) pour $x=4$.

D'une part : $5\times 4+3 = 23$

D'autre part : $7\times 3-5 = 23$

Donc : Cette égalité est vraie pour $x=4$.

$$10-6y = 3y-15 \quad (E_2)$$

▶ Tester l'égalité (E_2) pour $y=3$.

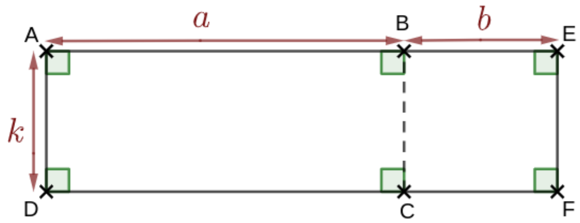
D'une part : $10-6\times 3 = -8$

D'autre part : $3\times 3-15 = -6$

Donc : Cette égalité est fausse pour $x=3$.

IV Développement

• Sur la figure suivante, $ABCD$ et $BEFC$ sont des rectangles :



Quelle est l'aire du rectangle $ABCD$? $\rightarrow$ $k\times a$

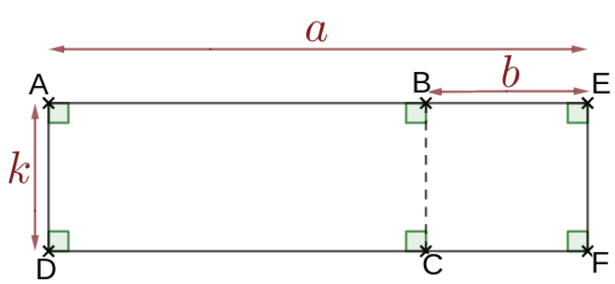
Quelle est l'aire du rectangle $BEFC$? $\rightarrow$ $k\times b$

Quelle est l'aire du rectangle $AEFD$? $\rightarrow$ $k\times(a+b)$

Comme $\mathscr{A}_{AEFD} = \mathscr{A}_{ABCD} + \mathscr{A}_{BEFC}$

Alors : $k(a+b) = k\times a + k\times b$

• Sur la figure suivante, $ABCD$ et $BEFC$ sont des rectangles :



Quelle est l'aire du rectangle $AEFD$? $\rightarrow$ $k\times a$

Quelle est l'aire du rectangle $BEFC$? $\rightarrow$ $k\times b$

Quelle est l'aire du rectangle $ABCD$? $\rightarrow$ $k\times(a-b)$

Comme $\mathscr{A}_{BCD} = \mathscr{A}_{AEFD} - \mathscr{A}_{BEFC}$

Alors : $k(a-b) = k\times a - k\times b$

Définition :
Développer une expression littérale, c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Propriété. *Formules de distributivité*
Soit a, b et k des nombres quelconques :

$$k(a+b) = ka + kb \qquad k(a-b) = ka - kb$$

Exemples. Développer les expressions :

$$\begin{aligned} C &= 5(x+6) \\ &= 5 \times x + 5 \times 6 \\ &= 5x + 30 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D &= 2(3y-7) \\ &= 2 \times 3y - 2 \times 7 \\ &= 6y - 14 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D &= 4a(5x-10) \\ &= 4a \times 5x - 4a \times 10 \\ &= 20ax - 40a \end{aligned}$$

V Factorisation

Définition :
Factoriser une expression littérale, c'est transformer une somme algébrique en produit.
Pour factoriser, on cherche ce que l'on appelle un facteur commun.

Propriété. *Formules de factorisation*
Soit a, b et k des nombres quelconques :

$$ka + kb = k(a+b) \qquad ka - kb = k(a-b)$$

Exemple. On souhaite factoriser $C = 3x + 6$. On cherche un facteur commun à $3x$ et à 6.

$$\begin{aligned} C &= 3 \times x + 3 \times 2 \\ C &= 3(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 6y \times ax - 13 \times ax \\ D &= ax(6y-13) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E &= 10 + 40x \\ E &= 10 \times 1 + 10 \times 4 \\ E &= 10(1+4x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F &= 7x^2 - 14x \\ F &= 7x \times x - 7x \times 2 \\ F &= 7x(x-2) \end{aligned}$$

VI Réduction

Définition :
Réduire une expression littérale c'est l'écrire avec le moins de termes possibles, en regroupant les termes de même « espèce ».

Exemples.
Réduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 10x + 8 + 9y + 8x + 7 + 2y \\ A &= 10x + 8 + 9y + 8x + 7 + 2y \\ A &= 18x + 11y + 15 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B &= 15x - 5b + 7 - 6x - 12b - 3 + 2x \\ B &= 15x - 5b + 7 - 6x - 12b - 3 + 2x \\ B &= 11x - 17b + 4 \end{aligned}$$

Attention !

On ne peut pas réduire dans les cas suivants :

$5x + 2$: cette expression n'est pas égale à $7x$.

À ne pas confondre avec $5x + 2x = 7x$.