

COURS DE MATHÉMATIQUES

Chapitre n° 11 : Équations

Niveau : Troisième

Année scolaire

2022- 2023

Notions abordées :

- Notions d'inconnue, d'équation, d'indéterminée, d'identité ;
- Résoudre algébriquement des équations du premier degré ;
- Mettre un problème en équation en vue de sa résolution ;
- Résoudre une équation produit nul ;
- Résoudre une équation $x^2 = a$.

Compétences évaluées :

- Introduire une lettre pour désigner une valeur inconnue et met un problème en équation, ;
- Tester si un nombre est solution d'une équation ;
- Résoudre algébriquement une équation du premier degré ;
- Équation produit nul ;
- Équation $x^2 = a$

Chapitre n° 11 : Équations

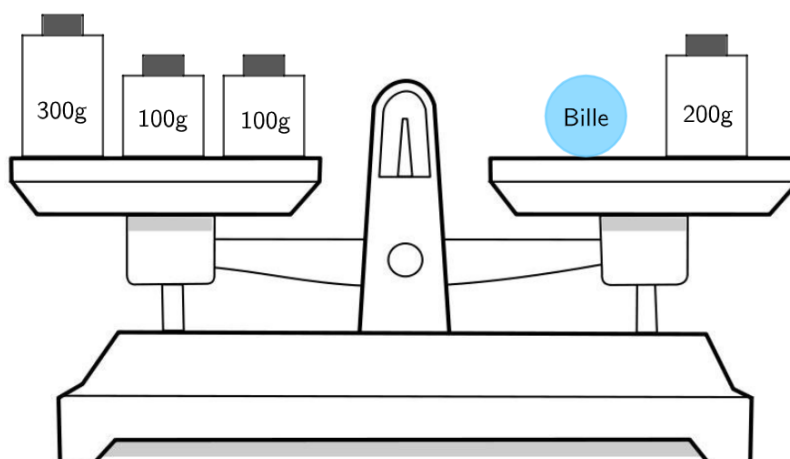
Table des matières

Introduction	2
I Notion d'équation - Définitions	4
II Résolution d'une équation	5
1 Additions et soustraction	5
2 Multiplications et divisions	5
III Résolution d'un problème	7
IV Équations particulières	8
1 Équation de la forme $x^2 = a$	8
2 Équation « produit nul »	8

Chapitre n° 11 : Équations

Introduction

La balance Roberval à deux fléaux est un instrument de pesage qui doit son nom à son inventeur Gilles Personne de Roberval, mathématicien et physicien français né en 1602, connu sous le nom de Roberval car il était originaire de Roberval dans l'Oise.

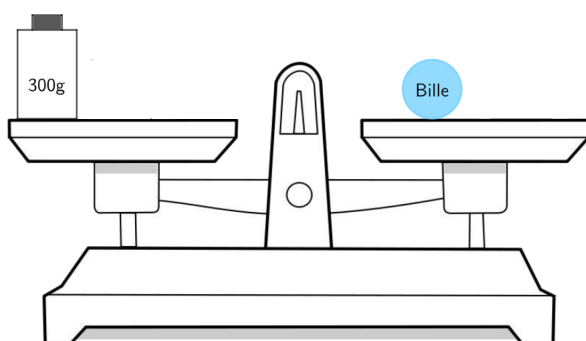


Voici une balance de Roberval à l'équilibre, est-il possible de déterminer la masse de cette bille ?

SOLUTION

► La balance étant à l'équilibre on a : $300g + 100g + 100g = \text{bille} + 200g$

► La balance restera à l'équilibre si on enlève la même masse sur les deux plateaux :



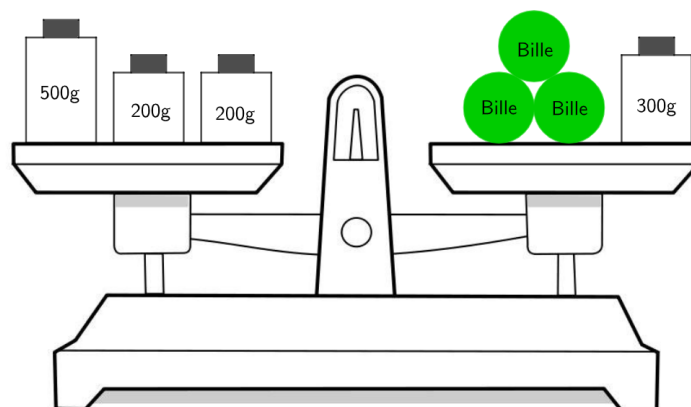
$$\begin{array}{lcl} \boxed{-200g} & 500g & = \text{bille} + 200g \quad \boxed{-200g} \\ & 300g & = \text{bille} \end{array}$$

► On peut faire la même chose cette fois ci en notant x la masse de la bille, ce qui donne :

$$\begin{array}{lcl} 300 + 100 + 100 & = & x + 200 \\ \boxed{-200} & 500g & = x + 200g \quad \boxed{-200} \\ & 300 & = x \end{array}$$

→ On vient de résoudre une équation !

► Voici une autre balance de Roberval à l'équilibre. Écrire une équation modélisant l'équilibre de cette balance puis la résoudre pour déterminer la masse d'une bille.



SOLUTION

On note x la masse d'une bille :

$$500 + 200 + 200 = 3x + 300 \quad (E)$$

$$\boxed{-300}$$

$$900 = 3x + 300$$

$$\boxed{-300}$$

$$\boxed{\div 3}$$

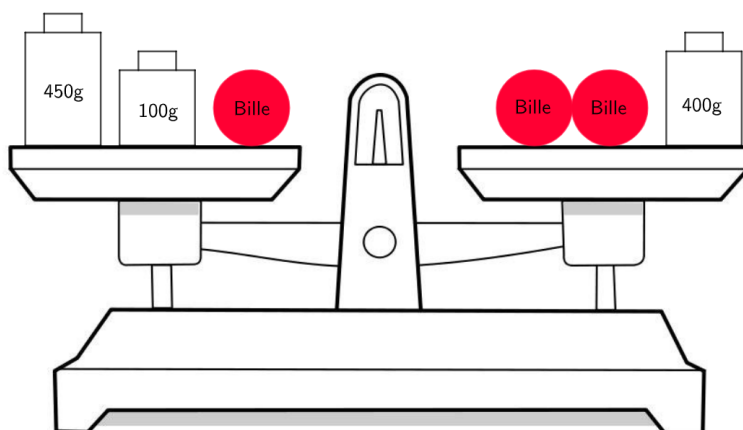
$$600 = 3x$$

$$\boxed{\div 3}$$

$$200 = x$$

Une bille pèse 200g.

► Voici une autre balance de Roberval à l'équilibre. Écrire une équation modélisant l'équilibre de cette balance puis la résoudre pour déterminer la masse d'une bille.



SOLUTION

On note x la masse d'une bille :

$$500 + 200 + 200 = 3x + 300 \quad (E)$$

$$\boxed{-300}$$

$$900 = 3x + 300$$

$$\boxed{-300}$$

$$\boxed{\div 3}$$

$$600 = 3x$$

$$\boxed{\div 3}$$

$$200 = x$$

Une bille pèse 200g.

I Notion d'équation - Définitions



Définition : Inconnue

| Une **inconnue** est une lettre qui désigne un nombre inconnu.



Définition : Équation

| Une **équation** est une égalité qui comporte une ou plusieurs inconnue(s).

EXEMPLE. Voici une équation a une inconnue :

$$\underbrace{55x + 6 - 3x}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{21 + 8x - 5}_{\text{membre de droite}}$$



Définition : Solution

| On dit qu'un nombre est **solution** d'une équation si l'égalité reste vraie lorsque l'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Tester si un nombre est solution

Pour vérifier si un nombre est bien solution d'une équation, on substitue d'une part le membre de droite et d'autre part le membre de gauche.

La comparaison des deux résultats permet alors de conclure.

EXEMPLES.

$$6x - 7 = -10 + 7x \quad (E)$$

► 4 est-il solution de l'équation (E) ?

D'une part : $6 \times 4 - 7 = 17$

D'autre part : $-10 + 7 \times 4 = 18$

Donc 4 n'est pas solution de (E).

► 3 est-il solution de l'équation (E) ?

D'une part : $6 \times 3 - 7 = 11$

D'autre part : $-10 + 7 \times 3 = 11$

Donc 3 est solution de l'équation (E).



Définition : Équation du premier degré

| Une **équation du premier degré** est une équation dans laquelle les puissances de l'inconnue sont au maximum de degré 1.

EXEMPLES.

$4x + 56 - x = -5x + 34$ est une équation du premier degré.

$5x^2 + 6x - 21 = 3x + 90$ n'est **pas** une équation du premier degré.

II Résolution d'une équation



Définition : Résoudre une équation

| **Résoudre** une équation c'est trouver toutes les solutions de cette équation, si elles existent.

1 ADDITIONS ET SOUSTRACTION

PROPRIÉTÉ.

Une égalité reste vraie lorsque l'on ajoute (ou que l'on soustrait) le **même nombre** aux deux membres de cette égalité.

Autrement dit : Soit a , b et k des nombres quelconques :

$$\text{Si } a = b \quad \text{Alors} \quad a + k = b + k \quad \text{et} \quad a - k = b - k$$

EXEMPLE. Voici une équation : $5x - 12 = 4x + 20$

L'égalité reste vraie si l'on ajoute par exemple 10 à chacun des membres :

$$\begin{array}{rcl} \boxed{+10} & 5x - 12 & = & 4x + 20 & \boxed{+10} \\ & 5x - 2 & = & 4x + 30 & \end{array}$$

Elle sera encore vraie si je soustrais $3x$ à chacun des membres :

$$\begin{array}{rcl} \boxed{-3x} & 5x - 2 & = & 4x + 20 & \boxed{-3x} \\ & 2x + 22 & = & x + 20 & \end{array}$$

Application : résolution

On veut résoudre l'équation suivante : $x + 6 = 10$.

► Le but étant de se ramener à une égalité de la forme $x = \dots$

$$\begin{array}{rcl} \boxed{-6} & x + 6 & = & 10 & \boxed{-6} \\ & x & = & 4 & \end{array}$$

Ainsi, 4 est la solution de cette équation, ce qui se vérifie rapidement : $4+6=10$!

2 MULTIPLICATIONS ET DIVISIONS

PROPRIÉTÉ.

Une égalité reste vraie lorsque l'on multiplie (ou que l'on divise) par un **même nombre non nul** les deux membres de cette égalité.

Autrement dit : Soit a , b et k des nombres quelconques, avec $k \neq 0$:

$$\text{Si } a = b \quad \text{Alors} \quad a \times k = b \times k \quad \text{et} \quad a \div k = b \div k$$

EXEMPLE. Voici une équation : $6x + 3 = 2x + 10$

L'égalité reste vraie si l'on multiplie par 3 chacun des membres :

$$\begin{aligned} \boxed{\times 3} \quad 6x + 3 &= 2x + 10 \quad \boxed{\times 3} \\ 3(6x + 3) &= 3(2x + 10) \\ 18x + 9 &= 6x + 30 \end{aligned}$$

Elle sera encore vraie si je divise par 2 chacun des membres :

$$\begin{aligned} \boxed{\div 2} \quad 18x + 9 &= 6x + 30 \quad \boxed{\div 2} \\ 9x + 4,5 &= 3x + 15 \end{aligned}$$

Application : résolution

On veut résoudre l'équation suivante : $9y - 8 = -23 - y$.

► On commence par regrouper les termes en y d'un même côté de l'égalité :

$$\begin{aligned} \boxed{+y} \quad 9y - 8 &= -23 - y \quad \boxed{+y} \\ \boxed{+8} \quad 10y - 8 &= -23 \quad \boxed{+8} \\ \boxed{\div 10} \quad 10y &= -15 \quad \boxed{\div 10} \\ y &= -1,5 \end{aligned}$$

Ainsi, $-1,5$ est la solution de cette équation.

► Il faut penser à vérifier si cette solution est la bonne !

$$\text{D'une part : } 9 \times 1,5 - 8 = -21,5 \quad \Bigg| \quad \text{D'autre part : } -23 - (-1,5) = -23 + 1,5 = -21,5$$

III Résolution d'un problème

Énoncé :

Un groupe scolaire, constitué d'un enseignant, de deux parents accompagnateurs, et de trente enfants, se rend au théâtre pour voir une représentation de L'Avare de Molière .

Les enfants bénéficient d'un tarif réduit soit 7 euros de moins que le tarif adulte.

Sachant qu'au total le prix de la sortie théâtre est de 615 euros, à combien s'élève le tarif pour un adulte ?

► Pour résoudre ce problème, on procède en plusieurs étapes.

► Étape 1 : Choix de l'inconnue.

On note x le tarif adulte. Donc le tarif enfant est $x - 7$

► Étape 2 : Mise en équation du problème.

Il y a 3 adultes et 30 enfants, ils vont payer : $3 \times x + 30 \times (x - 7)$.

On développe, on réduit ce qui donne : $33x - 210$.

Or on sait que le prix total de la sortie est 615 euros.

On arrive alors à l'équation : $33x - 210 = 615$.

► Étape 3 : Résolution.

$$\begin{array}{rclcl} \boxed{+210} & 33x - 210 & = & 615 & \boxed{+210} \\ \boxed{\div 33} & 33x & = & 825 & \boxed{\div 33} \\ & x & = & 25 & \end{array}$$

► Étape 4 : Vérification

Nous ne sommes pas à l'abri d'une étourderie ou d'une erreur de calcul, il est donc important de vérifier son résultat.

On trouve un tarif adulte de 25 euros et un tarif enfant de 18 euros ($25-7$) : $3 \times 25 + 30 \times 18 = 615$.

► Étape 5 : Conclusion.

Il ne faut pas oublier de répondre à la question initiale :

Le tarif adulte est de 25 euros.

IV Équations particulières

1 ÉQUATION DE LA FORME $x^2 = a$

PROPRIÉTÉ.

Solution de l'équation $x^2 = a$:

- Si $a = 0$ alors l'équation admet une **unique** solution qui est 0.
- Si $a > 0$ alors l'équation admet **deux** solution qui sont : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. $\mathcal{S} = \{\sqrt{a} ; -\sqrt{a}\}$
- Si $a < 0$ alors l'équation n'admet **pas** de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$

EXEMPLES. Résoudre les équations ci-dessous :

$$x^2 = 9$$

$9 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$$\mathcal{S} = \{\sqrt{9} ; -\sqrt{9}\}$$

Soit :

$$\mathcal{S} = \{3 ; 3\}$$

$$x^2 = 15$$

$15 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$$\mathcal{S} = \{\sqrt{15} ; -\sqrt{15}\}$$

$$x^2 = -341$$

$-341 < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

2 ÉQUATION « PRODUIT NUL »



Définition :

Soient a, b, c et d des nombres relatifs.

Une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ est une équation produit nul d'inconnue x .

PROPRIÉTÉ. (admise)

Si un produit est nul alors l'un, au moins, de ses facteurs est nul.

Autrement dit : Soit a et b deux nombres relatifs alors :

$$\underline{\text{Si}} : a \times b = 0 \quad \underline{\text{Alors}} : a = 0 \text{ ou } b = 0$$

EXEMPLE. Résoudre : $(2x + 7)(3x - 12) = 0$

Si un produit est nul alors l'un, au moins, de ses facteurs est nul.

$$\underline{\text{Soit}} : 2x + 7 = 0$$

$$2x + 7 = 0$$

$$2x = -7$$

$$x = \frac{-7}{2}$$

$$\underline{\text{Soit}} : -3x - 12 = 0$$

$$3x - 12 = 0$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

$$\underline{\text{Ainsi}} : \mathcal{S} = \left\{ \frac{-7}{2} ; 4 \right\}$$

EXEMPLE. Résoudre : $(3 - 2x)(2x + 5) = (4x - 5)(2x + 5)$

$$(3 - 2x)(2x + 5) = (4x - 5)(2x + 5)$$

$$(3 - 2x)(2x + 5) - (4x - 5)(2x + 5) = 0$$

$$(2x + 5)[(3 - 2x) - (4x - 5)] = 0 \quad \leftarrow \text{Factorisation par } (2x + 5)$$

$$(2x + 5)[3 - 2x - 4x + 5] = 0$$

$$(2x + 5)[6x + 8] = 0$$

Si un produit est nul alors l'un, au moins, de ses facteurs est nul.

$$\text{Soit : } 2x + 5 = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

$$2x = -5$$

$$x = \frac{-5}{2}$$

$$\text{Soit : } -6x + 8 = 0$$

$$-6x + 8 = 0$$

$$8 = 6x$$

$$\frac{4}{3} = x$$

$$\text{Ainsi : } \mathcal{S} = \left\{ \frac{4}{3} ; \frac{-5}{2} \right\}$$

EXEMPLE. Résoudre : $(4x - 11)^2 - (3x + 5)^2 = 0$

$$(4x - 11)^2 - (3x + 5)^2 = 0$$

$$(4x - 11 + 3x + 5)(4x - 11 - 3x - 5) = 0 \quad \leftarrow \text{On utilise l'identité remarquable } a^2 - b^2$$

$$(7x - 6)(x - 16) = 0$$

Si un produit est nul alors l'un, au moins, de ses facteurs est nul.

$$\text{Soit : } 7x - 6$$

$$7x - 6 = 0$$

$$7x = 6$$

$$x = \frac{6}{7}$$

$$\text{Soit : } -x - 16 = 0$$

$$x - 16 = 0$$

$$x = 16$$

$$\text{Ainsi : } \mathcal{S} = \left\{ \frac{6}{7} ; 16 \right\}$$