Cours de Mathématiques

Chapitre n°10 : Triangle : partie 2

Niveau : Cinquième

Année scolaire

2023 - 2024

Notions abordées :

- Médiatrice ;
- Cercle circonscrit ;
- Hauteur ;
- Aire d'un triangle.

Compétences évaluées :

- Tracer les médiatrices d'un triangle ;
- Tracer les hauteurs d'un triangle ;
- Calculer l'aire d'un triangle.

Chapitre n°10 : Triangle : partie 2

Table des matières

Chapitre n°10 : Triangle : partie 2

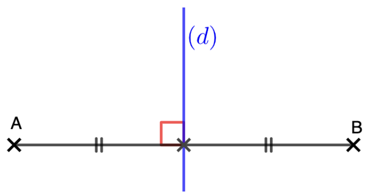
→ Toutes les définitions vues dans la partie 1 (chapitre 8) doivent être connues pour ce chapitre.

I Médiatrice

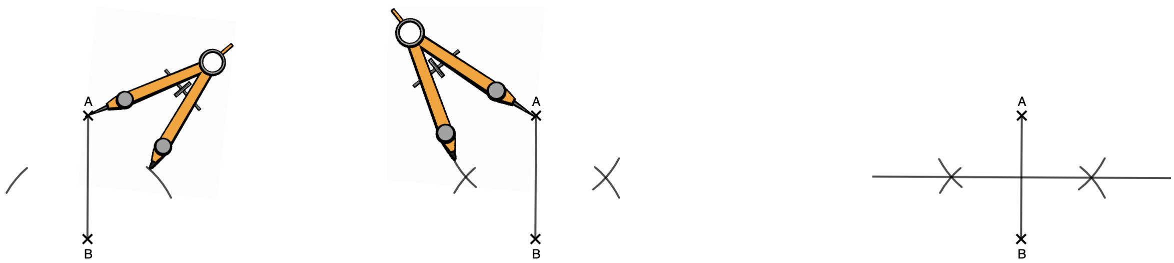
1 Médiatrice d'un segment

Définition :

1) La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par son milieu.



Construction



Étape 1 : Avec le compas, on prend un écartement (plus grand que la moitié de la longueur du segment).
On fait deux arcs de cercle de chaque côté du segment, en pointant le compas sur une des deux extrémités du segment

Étape 2 : On conserve le **même** écartement et on fait la même chose en pointant le compas sur l'autre extrémité du segment.

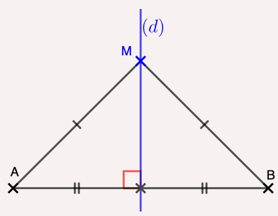
Étape 3 : On trace la droite passant par les deux points d'intersection des deux arcs de cercle.

Propriété.

Soit $[AB]$ un segment et (d) la médiatrice ce de segment.

Si : $M \in (d)$ alors : ABM est un triangle isocèle en M.

Autrement dit : Si M est sur la médiatrice de $[AB]$ alors $AM = BM$.



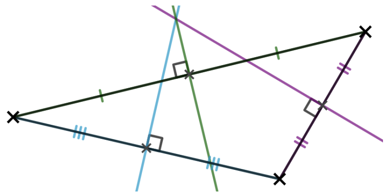
1) Tracer un segment $[SR]$ de longueur 5 cm.

2) Construire la médiatrice de ce segment.

2 Médiatrices dans un triangle

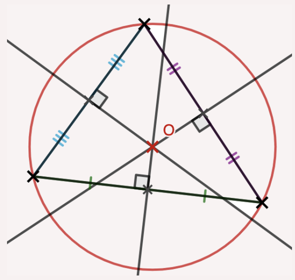
Définition :

Les médiatrices d'un triangles sont les médiatrices des trois côtés du triangle.



Propriété.

Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.



Démonstration.

Soit ABC un triangle.

Soient (d_1) et (d_2) les médiatrices respectives de $[AB]$ et de $[CB]$.

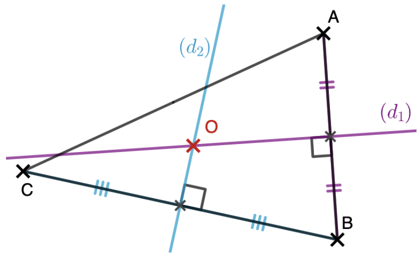
(d_1) et (d_2) sont sécantes, (sinon $(CB) \mathbin{/\!/} (AB)$ ou $A,\ B,\ C$ alignés).

On note O le point d'intersection de (d_1) et (d_2).

On a alors : $OA = OB$ et $OB = OC$.

Donc : $OA = OC$, ce qui veut dire que O est sur la médiatrice de $[AC]$.

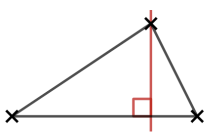
Donc : $A,\ B$ et C sont sur le cercle de centre O, point d'intersection des trois médiatrices de ABC.

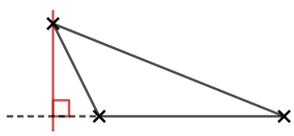


II Hauteurs dans un triangles

Définition :

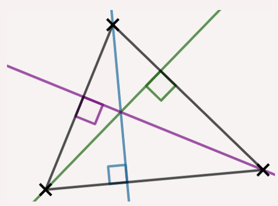
Une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.





Propriété.

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé l'orthocentre du triangle.

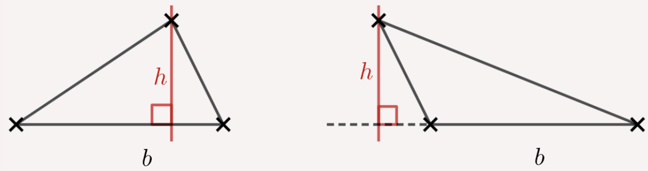


III Aire d'un triangle

Propriété.

L'aire d'un triangle est donné par la formule :

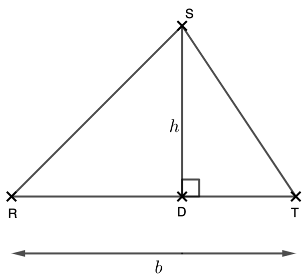
$$\mathscr{A} = \frac{b \times h}{2}$$

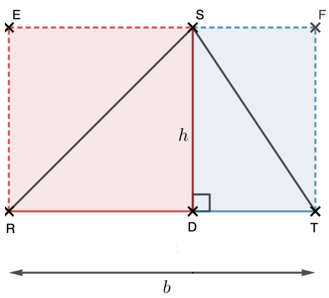


Où b est la longueur de l'un des côtés du triangles, qu'on appelle *base* et h la longueur de la hauteur associée.

Démonstration.

Soit RST un triangle. On construit la hauteur associée au côté $[RT]$.
On note b la longueur de $[RT]$ et h celle de la hauteur $[RD]$.
On obtient deux triangles rectangles RSD et RDT.
On construit les deux rectangles $ESDR$ et $SFTD$



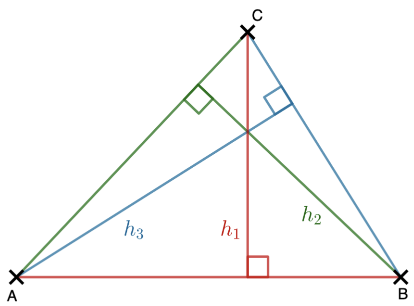


$$\mathscr{A}_{RST} = \mathscr{A}_{RSD} + \mathscr{A}_{SDT} = \frac{RD \times h + DT \times h}{2} \underset{\text{factorisation par } h}{=} \frac{h \times (RD + DT)}{2} = \frac{h \times b}{2}$$

Remarque

On peut calculer l'aire d'un triangle de trois manières différentes, il y a trois côtés, pouvant chacun être considéré comme la base. Chaque côté a sa hauteur associée

Exemple



$AB = 8\ cm \qquad h_1 = 5\ cm$

$AC = 7\ cm \qquad h_2 = 5,7\ cm$

$BC = 6\ cm \qquad h_3 = 6,8\ cm$

1) Base $[AB]$: $\mathscr{A} = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{AB \times h_1}{2} = \dfrac{8\ cm \times 5\ cm}{2} = 20\ cm^2$

2) Base $[AC]$: $\mathscr{A} = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{AC \times h_2}{2} = \dfrac{7\ cm \times 5,7\ cm}{2} = 19,95\ cm^2$

3) Base $[BC]$: $\mathscr{A} = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{BC \times h_3}{2} = \dfrac{6\ cm \times 6,8\ cm}{2} = 20,1\ cm^2$