# Cours de Mathématiques

Chapitre n°11 : Fractions (nombres rationnels) - $1^{ere}$ partie

Niveau : Cinquième

**Année scolaire**

2023 - 2024

## Notions abordées :

- Simplifier des fractions ;
- Comparer des fractions ;
- Encadrer un nombre rationnel entre deux entiers consécutifs.

## Compétences évaluées :

- Relier fractions et proportions ;
- Comparer, ranger et encadrer des nombres rationnels ;
- Reconnaître et produire des fractions égales ;
- Comparer, ranger, encadrer des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.

# Chapitre n°11 : Fractions (nombres rationnels) - $1^{ere}$ partie

## Table des matières

# Chapitre n°11 : Fractions (nombres rationnels) - $1^{ere}$ partie

## I Notion de fraction

**Définition :**

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$. La fraction $\frac{a}{b}$ est le quotient de $a$ par $b$.

On dit que $a$ est le numérateur et $b$ le dénominateur.

$$\begin{array}{lcl} \textit{numerateur} & \longrightarrow & a \\ \textit{denumerateur} & \longrightarrow & b \end{array} \quad \frac{a}{b} = a \div b$$

De plus : $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par $b$ vaut $a$.

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

Exemples.

$\frac{10}{2} = 10 \div 2 = 5$ $\quad \underbrace{\frac{10}{2}}_{=5} \times 2 = 10$ | $\frac{12}{4} = 12 \div 4 = 3$ $\quad \underbrace{\frac{12}{4}}_{=3} \times 4 = 12$

Remarques :

**Rappel :** Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimal (son écriture est finie)

*Exemple :* $1,5 = \frac{15}{10}$ $\quad 85,26 = \frac{8\ 526}{1\ 000}$

- Les nombres entiers et les nombres décimaux sont des nombres rationnels, on peut les écrire sous forme d'un quotient (d'une fraction).

En effet : $4 = 4 \div 1 = \frac{4}{1}$ $\quad 5,6 = 56 \div 10 = \frac{56}{10}$

- Les nombres peuvent s'écrire sous la forme d'une infinité de quotients différents.

En effet : $2 = \frac{2}{1} = \frac{12}{6} = \frac{50}{100}$ $\quad 23 = \frac{230}{10} = \frac{2\ 300}{1\ 000}$

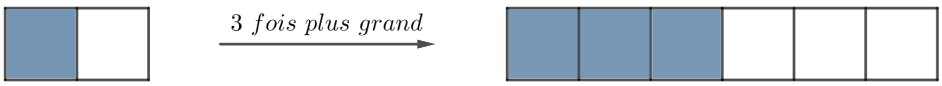
- Tous les nombres rationnels ne sont pas décimaux : $\frac{1}{3} = 0,33333...$ n'est pas décimal.

- Certains nombres ne sont pas rationnels : $\pi$.

# II Fractions égales

## 1 Introduction

Sur les deux figures ci-dessous, représenter la fraction $\frac{1}{2}$.




Sur la seconde figure ce que nous avons colorié en bleu représente aussi $\frac{3}{6}$. Donc : $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

## 2 Propriété

**Propriété.** (admise)

Un quotient ne change pas si on multiplie ou si on divise le numérateur **et** le dénominateur par un même nombre **non nul**.

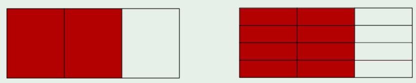
Autrement dit, soit $a$, $b$ et $k$ trois entiers non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \qquad et \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

**Exemples.** Les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{8}{12}$ sont égales.

En effet : $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$

On peut illustrer ces deux fractions pour visualiser cette égalité :



Les fractions $\frac{20}{15}$ et $\frac{4}{3}$ sont égales. En effet : $\frac{20}{15} = \frac{20 \div 5}{15 \div 5} = \frac{4}{3}$

## 3 Simplification

**Définition :**

Simplifier une fraction c'est utiliser la propriété ci-dessus afin d'obtenir des nombres plus petits au numérateur et au dénominateur.

Une fraction est irréductible lorsqu'elle est simplifiée au maximum.

**Exemple.** Pour simplifier la fraction $\frac{48}{30}$, on remarque que 48 et 30 sont divisibles par 6.

$$\frac{48}{30} = \frac{48 \div 6}{30 \div 6} = \frac{8}{5}$$

Ici on ne peut plus simplifier la fraction, elle est **irréductible**, elle est simplifiée au maximum.
On peut procéder en plusieurs étapes avant d'arriver à une fraction irréductible :

$$\frac{48}{30} = \frac{48 \div 2}{30 \div 2} = \frac{24}{15} = \frac{24 \div 3}{15 \div 3} = \frac{8}{5}$$

# III Comparaison de fractions

## 1 Comparaison

**Propriété.** (admise)

Soit $a$, $b$ et $c$ trois entiers relatifs avec $c > 0$. Si : $a < b$ alors : $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

**Remarque**

Pour comparer des fractions, il faut qu'elles soient au même dénominateur.

**Exemples.**

$\dfrac{5}{14} < \dfrac{12}{14}$ car $5 < 12$ $\dfrac{-6}{10} < \dfrac{3}{10}$ car $-6 < 3$ $\dfrac{-21}{37} < \dfrac{-11}{37}$ car $-21 < -11$

---

► On veut comparer $\dfrac{3}{10}$ et $\dfrac{1}{2}$.

Ces fractions ne sont pas au même dénominateur : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1 \times 5}{2 \times 5} = \dfrac{5}{10}$

Comme $3 < 5$ alors $\dfrac{3}{10} < \dfrac{5}{10}$ donc : $\dfrac{3}{10} < \dfrac{1}{2}$

---

► On veut comparer $\dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{11}{24}$.

Ces fractions ne sont pas au même dénominateur : $\dfrac{5}{8} = \dfrac{5 \times 3}{8 \times 3} = \dfrac{15}{24}$

Comme $15 > 11$ alors $\dfrac{15}{24} > \dfrac{11}{24}$ donc : $\dfrac{5}{8} > \dfrac{11}{24}$

---

► On veut comparer $\dfrac{8}{12}$ et $\dfrac{11}{6}$.

Méthode 1 : $\dfrac{11}{6} = \dfrac{11 \times 2}{6 \times 2} = \dfrac{22}{12}$

Comme : $\dfrac{22}{12} > \dfrac{8}{12}$ Alors : $\dfrac{8}{12} < \dfrac{11}{6}$

Méthode 2 : $\dfrac{8}{12} = \dfrac{8 \div 2}{12 \div 2} = \dfrac{4}{6}$

Comme : $\dfrac{11}{6} > \dfrac{4}{6}$ Alors : $\dfrac{8}{12} < \dfrac{11}{6}$

---

► On veut comparer $\dfrac{10}{7}$ et $\dfrac{5}{8}$.

Ces fractions ne sont pas au même dénominateur : $\dfrac{10}{7} = \dfrac{10 \times 8}{7 \times 8} = \dfrac{80}{56}$ et $\dfrac{5}{8} = \dfrac{5 \times 7}{8 \times 7} = \dfrac{35}{56}$

Comme $\dfrac{80}{56} < \dfrac{35}{56}$ alors $\dfrac{10}{7} < \dfrac{8}{5}$

## 2 Encadrement

**Exemple.**

► Encadrer $\dfrac{18}{5}$ entre deux entiers consécutifs.

On cherche deux multiples de 5 consécutifs qui encadrent 18.

$$5 \times 1 = 5 \quad < \quad 5 \times 2 = 10 \quad < \quad 5 \times 3 = 15 \quad < \quad 18 \quad < \quad 5 \times 4 = 20$$

Donc : $\underbrace{\dfrac{15}{5}}_{=3} < \dfrac{18}{5} < \underbrace{\dfrac{20}{5}}_{=4}$