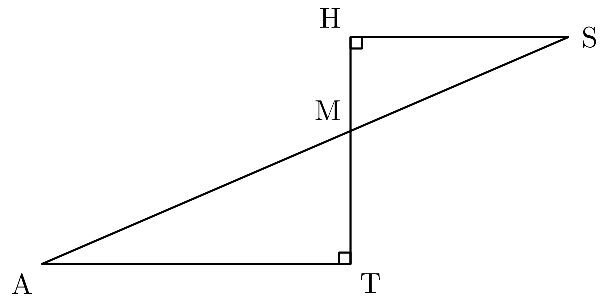
Amérique du Nord - Juin 2022 - Correction

La figure ci-contre n'est pas à l'échelle.



- Les points M, A et S sont alignés
- Les points M, T et H sont alignés.
- $MH = 5\ cm$
- $MS = 13\ cm$
- $MT = 7\ cm$

1. Démontrer que la longueur HS est égale à 12 cm.

Le triangle MHS est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} MS^2 &= HS^2 + MH^2 \\ 13^2 &= HS^2 + 5^2 \\ 169 &= HS^2 + 25 \\ HS^2 &= 169 - 25 \\ HS^2 &= 144 \end{aligned}$$

Comme HS est une longueur, $HS > 0$ Donc : $HS = \sqrt{144} = 12\ cm$

2. Calculer la longueur AT.

On a : $(HS) \perp (TH)$ et $(AT) \perp (TH)$

Or : Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.

Donc : $(HS) /\!/ (AT)$

Les points H, M, T et A, M, S sont alignés dans cet ordre **et** $(HS) /\!/ (AT)$.

D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{MS}{MA} = \dfrac{MH}{MT} = \dfrac{HS}{AT}$ soit $\dfrac{13}{MA} = \dfrac{5}{7} = \dfrac{12}{AT}$

Ainsi : $AT = \dfrac{12 \times 7}{5} = 16,8\ cm$

3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HMS}$. On arrondira le résultat au degré près.

Le triangle HMS est rectangle en H, on connaît la longueur de chaque côté, on peut utiliser l'une des trois fonctions trigonométrique au choix.

$cos(\widehat{HMS}) = \dfrac{HM}{MS} = \dfrac{5}{13}$	$sin(\widehat{HMS}) = \dfrac{HS}{MS} = \dfrac{12}{13}$	$tan(\widehat{HMS}) = \dfrac{HS}{HM} = \dfrac{12}{5}$
$\widehat{HMS} = Arccos\left(\dfrac{5}{13}\right)$	$\widehat{HMS} = Arcsin\left(\dfrac{12}{13}\right)$	$\widehat{HMS} = Arctan\left(\dfrac{12}{5}\right)$
$\widehat{HMS} \simeq 67°$	$\widehat{HMS} \simeq 67°$	$\widehat{HMS} \simeq 67°$

4. Parmi les transformations suivantes quelle est celle qui permet d'obtenir le triangle MAT à partir du triangle MHS ? *Dans cette question, aucune justification n'est attendue.*

Une symétrie axiale	Une symétrie centrale	Une rotation	Une translation	Une homothétie

En effet, il s'agit d'une homothétie de centre M. C'est la seule translation qui ne conserve pas les longueurs.

5. Sachant que la longueur MT est 1,4 fois plus grande que la longueur HM, un élève affirme :

« L'aire du triangle MAT est 1,4 fois plus grande que l'aire du triangle MHS. »

Cette affirmation est-elle vraie ? *On rappelle que la réponse doit être justifiée.*

Cette affirmation est **fausse**.
MAT est un agrandissement de rapport $1,4$ du triangle MHS. Les longueurs sont multipliées par 1,4 mais les aires sont multipliées par $1,4^2 = 1,96$ *(cours)*.

Pour s'en assurer on peut calculer les deux aires :

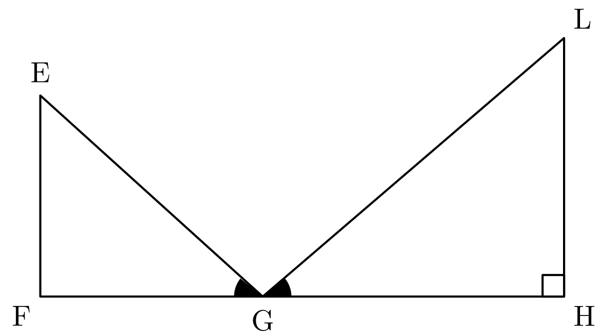
$$\mathscr{A}_{MAT} = \frac{b \times h}{2} = \frac{AT \times MT}{2} = \frac{16,8 \times 7}{2} \;=\; 58,8\ cm^2 \qquad \mathscr{A}_{MHS} == \frac{b \times h}{2} = \frac{HS \times MH}{2} = \frac{12 \times 5}{2} \;=\; 30\ cm^2$$

$30 \times 1,4 = 42 \neq 58,8$ $\qquad$ $30 \times 1,96 = 58,8$

Amérique du Sud - Novembre 2023 - Correction

On considère la figure ci-contre dans laquelle :

- Les points F, G et H sont alignés
- (LH) est perpendiculaire à (FH)
- $EF = 18\ cm$; $FG = 24\ cm$
- $EG = 30\ cm$; $GH = 38,4\ cm$
- $\widehat{\text{EGF}} = \widehat{\text{LGH}}$.



La figure n'est pas en vraie grandeur

1. Montrer que le triangle EFG est rectangle en F.

Dans le triangle EDF le côté le plus long est $[EG]$

D'une part : $EG^2 = 30^2 = 900$

D'autre part : $EF^2 + GF^2 = 18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900$

On a : $EG^2 = EF^2 + GF^2$

Donc : D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EDG est rectangle en F.

2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{\text{EGF}}$ (arrondir au degré).

Le triangle EFG est rectangle en F, on connaît la longueur de chaque côté, on peut utiliser l'une des trois fonctions trigonométrique au choix.

$cos(\widehat{EGF}) = \dfrac{FG}{EG} = \dfrac{24}{30}$

$\widehat{EGF} = Arccos\left(\dfrac{24}{30}\right)$

$\widehat{EGF} \simeq 37°$

$sin(\widehat{EGF}) = \dfrac{EF}{EG} = \dfrac{18}{30}$

$\widehat{EGF} = Arcsin\left(\dfrac{18}{30}\right)$

$\widehat{EGF} \simeq 37°$

$tan(\widehat{EGF}) = \dfrac{EF}{FG} = \dfrac{18}{24}$

$\widehat{EGF} = Arctan\left(\dfrac{18}{24}\right)$

$\widehat{EGF} \simeq 37°$

3. Montrer que les triangles EGF et LGH sont semblables.

Ces deux triangles ont deux angles en commun : leur angle droit et $\widehat{\text{EGF}} = \widehat{\text{LGH}}$.
La somme des mesures des angles dans un triangle étant toujours égale à 180°, leur troisième angle sont de même mesure. Ces triangles sont donc semblables.

4. Parmi les propositions suivantes, quel est le coefficient d'agrandissement qui permet de passer du triangle EFG au triangle LHG ? Expliquer.

0,625	1,28	1,6	2,6

On justifie à l'aide d'une paire de côtés homologues : $[FG]$ et $[GH]$ (on ne connaît que GH dans GHL).

Le coefficient pour passer de FG à GH : $\dfrac{GH}{FG} = \dfrac{38,4}{24} = 1,6$ En effet : $FG \times 1,6 = 24 \times 1,6 = 38,4 = GH$

Rappel : Ce coefficient est le nombre k tel que $FG \times k = GH$

5. Quel est le périmètre du triangle LGH ?

LGH étant un agrandissement de EFG le périmètre de LGH est 1,6 fois plus grand que celui de EFG.

$\mathscr{P}_{EFG} = 18 + 24 + 30 = 72\ cm$ $\mathscr{P}_{LGH} = 1,6 \times \mathscr{P}_{EFG} = 1,6 \times 72 = 115,2\ cm$

Autre méthode :

$GH = 38,4$ $GL = 1,6 \times EG = 1,6 \times 30 = 48$ $LH = 1,6 \times EF = 1,6 \times 18 = 28,8$

$\mathscr{P}_{LGH} = 38,4 + 48 + 28,8 = 115,2\ cm$

Nouvelle Calédonie - Juin 2023 - Correction

Matthieu souhaite isoler la toiture de sa maison. Il compte utiliser de la laine de roche pour le toit de sa terrasse et de la ouate de cellulose pour le toit de la partie habitable.

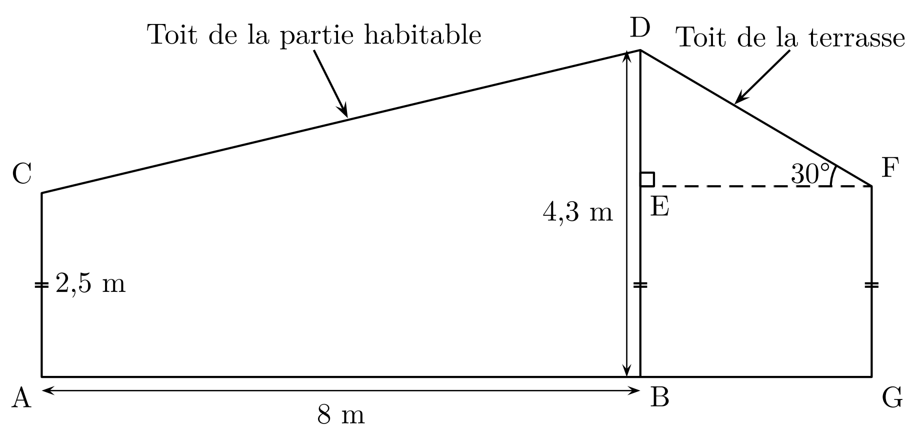
Pour savoir quelles quantités de matériaux acheter, il doit effectuer des calculs. Il a noté sur un plan de sa maison ci-dessous (vue de profil), toutes les mesures qu'il connait :

$D,\ E,\ B$ et $A,\ B,\ G$ sont alignés

$AC = 2,5\ m$ $AB = 8\ m$

$BD = 4,\ 3m$ $\widehat{\text{EFD}} = 30°$

Le plan n'est pas à l'échelle



1. Justifier que $DE = 1,8\ m$.

D'après le codage : $CA = EB = FG = 2,5\ m$

Ainsi : $DE = DB - EB = 4,3 - 2,5 = 1,8\ m$

2. Montrer que la longueur DF du toit de la terrasse est égale à $3,6\ m$.

Dans le triangle DEF rectangle en E, on cherche la longueur de l'hypoténuse : DF.

On connaît l'angle $\widehat{EDF}$ et la longueur de son côté opposé ($DE = 1,8\ m$), on utilise donc le *sinus*.

$sin(\widehat{EDF}) = \dfrac{DE}{DF}$ soit $\dfrac{sin(30°)}{1} = \dfrac{1,8}{DF}$ donc $DF = \dfrac{1,8}{sin(30°)} = 3,6\ m$

On considère que :

— le toit de la terrasse est un rectangle de longueur 12 m et de largeur $3,6$ m ;

— un rouleau de laine de roche couvre 6 m^2.

3. Déterminer le nombre de rouleaux de laine de roche qu'il doit acheter pour le toit de sa terrasse.

$\mathscr{A}_{toit} = 12 \times 3,6 = 43,2\ m^2$ $\qquad \dfrac{43,2}{6} = 7,2$ Il doit acheter 8 rouleaux.

4. Montrer que la longueur CD du toit de la partie habitable est égale à $8,2$ m.

Dans le triangle CDE rectangle en E, le théorème de Pythagore s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} CD^2 & = & CE^2 + DE^2 \\ CD^2 & = & 8^2 + 1,8^2 \\ CD^2 & = & 64 + 3,24 \\ CD^2 & = & 67,24 \end{array}$$

Comme CD est une longueur, $CD > 0$ Donc : $CD = \sqrt{67,24} = 8,2\ cm$

On considère que :

— le toit de la partie habitable est un rectangle de longueur 12 m et de largeur $8,2$ m ;

— Matthieu souhaite installer de la ouate de cellulose sur une épaisseur de 10 cm ;

— la densité de la ouate de cellulose est de 40 kg/m^3.

5. Déterminer la masse, en kg, de ouate de cellulose qu'il doit acheter pour le toit de la partie habitable.

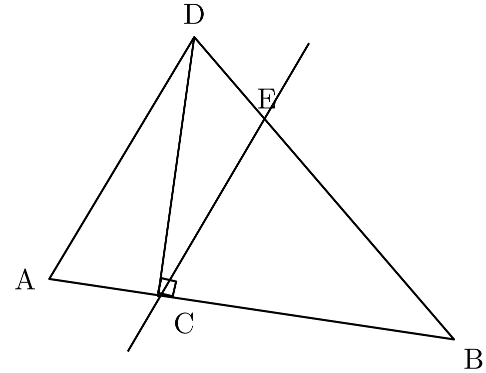
Le volume du pavé obtenu en mettant sur ce toit 10 cm de ouate sera égal à : $12 \times 8,2 \times \underbrace{0,1}_{10cm=0,1m} = 9,84\ m^3$

On sait qu'un m^3 de ouate pèse 40 kg.

$40 \times 9,84 = 393,6$ Il doit acheter 393,6 kg de ouate de cellulose.

Asie (secours) - Juin 2021 - Correction

La figure n'est pas à l'échelle



Sur la figure ci-contre :

- Le triangle DCB est rectangle en C
- Les points A, C, B et D, E, B sont alignés
- $AC = 3,2\ cm$; $CB = 6,8\ cm$
- $BD = 8,5\ cm$; $BE = 5,8\ cm$

1. Démontrer que la longueur DC est égale à $5,1$ cm.

Le triangle DBC est rectangle en C, le théorème de Pythagore s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} DB^2 & = & CB^2 + DC^2 \\ 8,5^2 & = & 6,8^2 + DC^2 \\ 72,25 & = & 46,24 + DC^2 \\ DC^2 & = & 72,25 - 46,24 \\ DC^2 & = & 26,01 \end{array}$$

Comme DC est une longueur, $DC > 0$ Donc : $DC = \sqrt{26,01} = 5,1\ cm$

2. Calculer l'aire du triangle DCB en cm^2.

$$\mathscr{A}_{DBC} = \frac{DC \times CB}{2} = \frac{5,1 \times 6,8}{2} = 17,34\ cm^2$$

3. À l'aide de la calculatrice, calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{\text{ADC}}$, au degré près.

Les points $A,\ C$ et B étant alignés on a : $\widehat{ACD} \quad = \quad 180° - \widehat{DCB} \quad = \quad 180° - 90° \quad = \quad 90°$

Le triangle ADC est rectangle en C, on connaît la longueur du côté opposé et du coté adjacent de l'angle $\widehat{ACD}$. On utilise la tangente.

$tan(\widehat{ACD}) \ = \ \dfrac{AC}{DC}$ soit $\tan(\widehat{ACD}) \ = \ \dfrac{3,2}{5,1}$ Ainsi : $\widehat{ACD} = Arctan\left(\dfrac{3,2}{5,1}\right) \ \simeq \ 32\circ$

4. Les droites (AD) et (CE) sont-elles parallèles ?

- Les points $A,\ C,\ B$ et $D,\ E,\ B$ sont alignés dans cet ordre.

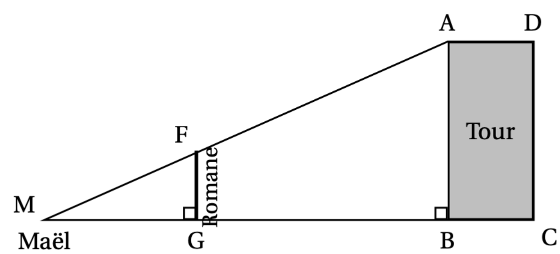
D'une part : $\dfrac{BC}{BA} \ = \ \dfrac{6,8}{10} = \dfrac{17}{25}$ D'autre part : $\dfrac{BE}{BD} \ = \ \dfrac{5,8}{8,5} \ = \ \dfrac{58}{85}$

On a : $\dfrac{BC}{BA} \neq \dfrac{BE}{BD}$ (en effet $17 \times 85 = 1\ 445 \quad \neq \quad 1\ 450 = 25 \times 58$)

Donc : (AD) et (CE) ne sont pas parallèles.

Métropole (secours) - Juin 2021 - Correction

La tour de la Vade est un monument de Carcassonne.
Afin de déterminer la hauteur de cette tour, Romane et Maël se sont positionnés comme indiqué sur la figure ci-dessous, et ont effectué plusieurs mesures.



Les points M, F et A et les points M, G et B sont alignés.
$MG = 3\ m \qquad FG = 1,4\ m \qquad GB = 51\ m$

L'œil de Maël est au point M ; le segment $[FG]$ représente Romane.

1 Montrer que les droites (FG) et (AB) sont parallèles.

On a : $(FG) \perp (MC)$ et $(AB) \perp (MC)$.

Or : Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc : $(FG) /\!/ (AB)$.

2. Vérifier que la hauteur AB de la tour est de $25,2\ m$.

Les points $M,\ F,\ A$ et $M,\ G,\ B$ sont alignés dans cet ordre **et** $(FG) /\!/ (AB)$.

Le théorème de Thalès s'écrit : $\dfrac{FG}{AB} = \dfrac{MG}{MB} = \dfrac{MF}{AM}$ soit $\dfrac{1,4}{AB} = \dfrac{3}{54} = \dfrac{MF}{AM}$

Ainsi : $AB = \dfrac{FB \times MB}{MG} = \dfrac{1,4 \times 54}{3} = 25,2.$
La hauteur de la tour est bien de 25,2 mètres.

3. La tour a une base circulaire de diamètre proche de 14 m. Montrer que son volume est d'environ 3 880 m^3 .

Le rayon de la base circulaire est : $r = 14\ m \div 2 = 7\ m$

$\mathcal{V}_{tour} = \pi \times r \times r \times h$ (formule pour le volume d'un cylindre)
$\mathcal{V}_{tour} = \pi \times 7 \times 7 \times 25,2$
$\mathcal{V}_{tour} \simeq 3\ 880\ m^3$

4. Romane a acheté une maquette de cette tour à l'échelle $\dfrac{1}{20}$. Quel est le volume de cette maquette ?

Il s'agit d'une réduction de coefficient $\dfrac{1}{20}$. Le volume de la tour est multiplié par $\left(\dfrac{1}{20}\right)^3 = \dfrac{1}{8\ 000}$

$\mathcal{V}_{maquette} = \dfrac{1}{8\ 000} \times 3\ 880 = 0,485\ m^3$

Le volume de cette maquette est de 0,485 m^3.

Autre méthode :

Échelle $\dfrac{1}{20}$ cela signifie que l'on a une tour 20 fois plus petite donc ses dimensions sont 20 fois plus petites.

$r = 7\ m \div 20 = 0,35\ m \qquad h = 25,2\ m \div 20 = 1,26\ m$

$\mathcal{V}_{maquette} = \pi \times 0,35 \times 0,35 \times 1,26 \simeq 0,48$

Le volume de cette maquette est d'environ 0,48 m^3.

5. La tour doit être entretenue ; il faut passer un traitement contre la moisissure sur toute sa surface.

Aire latéral d'un cylindre :
$2 \times rayon \times pi \times hauteur$

Le coût du traitement est de 39€ par m^2.

Combien va coûter le traitement de la tour ?

$\mathscr{A}_{laterale} = 2 \times r \times \pi \times h$

$\mathscr{A}_{laterale} = 2 \times 7 \times \pi \times 25,2$

$\mathscr{A}_{laterale} \simeq 1\ 108\ m^2$

L'aire latérale de la tour est d'environ 1 108 m^2.

$1108 \times 39 = 43\ 212$.

Le traitement de la tour va coûter environ 43 212 euros.

Métropole - Septembre 2023 - Correction

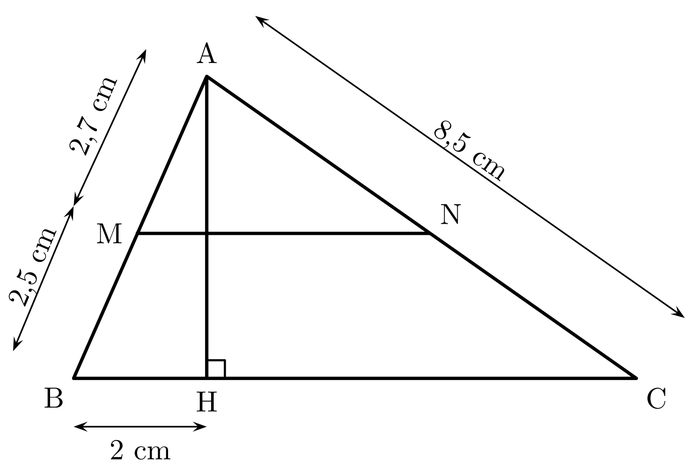
La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle

Dans le triangle ABC ci-contre, M est un point du côté $[AB]$, N est un point du côté $[AC]$, et H est un point du côté $[BC]$.

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

<u>On donne :</u>

- AC $= 8,5$ cm ;
- AM $= 2,7$ cm ;
- MB $= 2,5$ cm ;
- BH $= 2$ cm.



1. Calculer AB.

$AB = AM + MB = 2,7 + 2,5 = 5,2\ cm$

2. Montrer que la longueur AH est égale à $4,8\ cm$.

Le triangle AHB est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
AB^2 &= AH^2 + BH^2 \\
AB^2 &= AH^2 + BH^2 \\
5,2^2 &= AH^2 + 2^2 \\
27,04 &= AH^2 + 4 \\
AH^2 &= 27,04 - 4 \\
AH^2 &= 23,04
\end{aligned}$$

Comme AH est une longueur, $AH > 0$ donc $AH = \sqrt{23,04} = 4,8\ cm$

3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACH}$. Arrondir au degré.

Le triangle ACH est rectangle en H.

On connaît la longueur de l'hypoténuse et celle du côté opposé à $\widehat{ACH}$.

<u>On utilise le sinus :</u> $sin(\widehat{ACH}) = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{4,8}{8,5}$ <u>Donc :</u> $\widehat{ACH} = arcsin\left(\dfrac{4,8}{8,5}\right) \simeq 34°$

4. Calculer la longueur HC. Arrondir aucm.

Le triangle ACH est rectangle en H.

On connaît la longueur de l'hypoténuse et la mesure de l'angle $\widehat{ACH}$. On cherche le côté adjacent à cet angle.

<u>On utilise le cosinus :</u> $cos(\widehat{ACH}) = \dfrac{HC}{AC}$ <u>soit</u> $cos(34°) = \dfrac{HC}{8,5}$ <u>soit</u> $\dfrac{cos(34°)}{1} = \dfrac{HC}{8,5}$

<u>D'où :</u> $HC = cos(34°) \times 8,5 \ \simeq\ 7\ cm$

5. Un élève affirme que : « AN est inférieure à 4 cm ». A-t-il raison ?

Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans cet ordre et $(MN) /\!/ (BC)$

<u>D'après le théorème de Thalès :</u> $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$ <u>soit</u> $\dfrac{2,7}{5,2} = \dfrac{AN}{8,5} = \dfrac{MN}{BC}$

<u>D'où :</u> $AN = \dfrac{2,7 \times 8,5}{5,2} \simeq 4,4\ cm$ L'élève n'a pas raison.

6. Calculer l'aire du triangle AHC.

$$\mathscr{A}_{AHC} = \frac{b \times h}{2} = \frac{AH \times HC}{2} = \frac{4,8 \times 7}{2} = 16,8\ cm^2$$