

Rappel n°1 : Le théorème de Pythagore

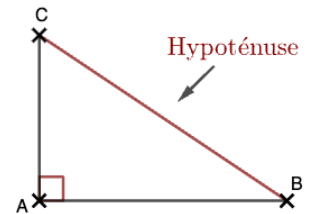
I Théorème

THÉORÈME

Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse.

Dans ce triangle ABC rectangle en A on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$



EXEMPLE.

Déterminer la longueur ST dans le triangle RST .

Le triangle RST est rectangle en R , le théorème de Pythagore s'écrit :

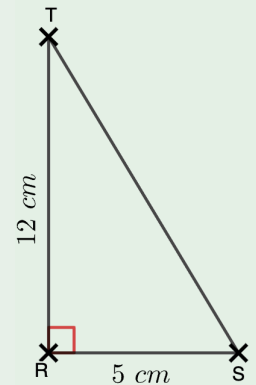
$$TS^2 = RS^2 + RT^2$$

$$TS^2 = 5^2 + 12^2$$

$$TS^2 = 25 + 124$$

$$TS^2 = 169$$

Comme TS est une longueur, $TS > 0$ donc $TS = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$.



REMARQUE

Dans l'exemple précédent, on précise que TS est une longueur car il existe deux nombres dont le carré est 169, à savoir 13 et -13 .

EXEMPLE.

Déterminer la longueur MS dans le triangle MOS .

Le triangle MOS est rectangle en M , le théorème de Pythagore s'écrit :

$$OS^2 = MO^2 + MP^2$$

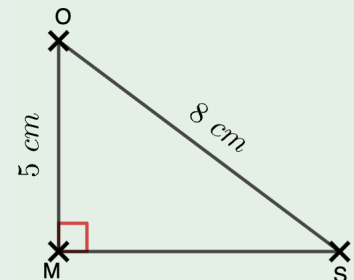
$$8^2 = 5^2 + MP^2$$

$$64 = 25 + MP^2$$

$$MP^2 = 64 - 25$$

$$MP^2 = 39$$

Comme MP est une longueur, $MP > 0$ donc $MP = \sqrt{39} \simeq 6,2 \text{ cm}$.



REMARQUE

Dans l'exemple précédent, on ne peut donner qu'une valeur approchée de la longueur MP .

II Réciproque

PROPRIÉTÉ. *Réciproque du théorème de Pythagore*

Si dans un triangle ABC on a $BC^2 = AC^2 + AB^2$ **alors** ABC est un triangle rectangle en A .

Cette propriété réciproque sert à démontrer qu'un triangle est rectangle.

EXEMPLE. Soit ABC un triangle tel que $AB = 2\text{cm}$, $BC = 2,1\text{cm}$ et $AC = 2,9\text{cm}$.

• Ce triangle est-il rectangle ?

→ On identifie le côté le plus long car si ce triangle est rectangle ce sera l'hypoténuse.

Le côté le plus long est $[AC]$.

→ On regarde ensuite si l'égalité de Pythagore est vérifiée :

$$\begin{array}{l} \text{D'une part : } AC^2 = 2,9^2 = 8,41. \\ \text{D'autre part : } BC^2 + AB^2 = 2,1^2 + 2^2 \\ \phantom{\text{D'autre part : }} = 4,41 + 4 \\ \phantom{\text{D'autre part : }} = 8,41 \end{array}$$

→ On conclut :

$$\text{On a : } AC^2 = BC^2 + AB^2$$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en B .

III Contraposée

PROPRIÉTÉ. *Contraposée du théorème de Pythagore*

Si dans un triangle ABC , où $[BC]$ est le plus long côté, on a $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$ **alors** ABC **n'est pas** un triangle rectangle.

Cette propriété contraposée sert à démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

EXEMPLE. Soit RST un triangle tel que $RT = 8\text{cm}$, $ST = 6\text{cm}$ et $RS = 5\text{cm}$.

• Ce triangle est-il rectangle ?

→ On identifie le côté le plus long car si ce triangle est rectangle ce sera l'hypoténuse.

Le côté le plus long est $[RT]$.

→ On regarde ensuite si l'égalité de Pythagore est vérifiée :

$$\begin{array}{l} \text{D'une part : } RT^2 = 8^2 = 64. \\ \text{D'autre part : } ST^2 + RS^2 = 6^2 + 5^2 \\ \phantom{\text{D'autre part : }} = 36 + 25 \\ \phantom{\text{D'autre part : }} = 61 \end{array}$$

→ On conclut :

$$\text{On a : } RT^2 \neq ST^2 + RS^2$$

Donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore RST n'est pas rectangle.