Cours de Mathématiques

Chapitre n° 3 : Puissances

Niveau : Quatrième (rappels) et Troisième

Année scolaire

2024 - 2025

Notions abordées :

— Puissance d'un nombre et écriture scientifique ;

— Passer d'une représentation d'un nombre à une autre, associer à des objets des ordres de grandeur ;

— Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur ;

— Préfixes *nano* et *giga*.

Compétences évaluées :

— Effectuer des calculs numériques impliquant les puissances ;

— Connaître les propriétés des puissances ;

— Vérifier la vraisemblance d'un résultat ;

— Connaître les préfixes nano et giga.

Chapitre n° 3 : Puissances

Table des matières

Chapitre n° 3 : Puissances

I Puissance

1 Exposant positif

Définition :

Soit a un nombre relatif et n un entier positif **non nul**.

a^n désigne le produit de n facteurs, tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ \dots \ \times a \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

a^n se lit a puissance n ou a exposant n

Exemples

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$$

$$123^0 = 1$$

Remarque

Par convention, pour tout nombre a **non nul** $a^0 = 1$.

2 Exposant négatif

Définition :

Soit a un nombre relatif non nul et n un entier positif **non nul**. a^{-n} est l'inverse de a^n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ \dots \ \times a \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

Exemple

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{16}$$

$$9^{-1} = \frac{1}{9}$$

II Calculer avec des puissances

1 Priorités opératoires

Propriété.

Les puissances sont prioritaires sur les multiplications et les divisions.

Exemple

$2 \times 6^3 = 2 \times 216 = 432$

$21 \div (2 + 4 \times 2)^4 = 21 \div 10^4 = 21 \div 10000 = 0,00021$

2 Règles de calcul

Propriété.

Soit a un nombre relatif non nul et soit n et m deux entiers relatifs alors :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^n)^m = a^{n \times m}$$

Démonstration.

1. $\overbrace{\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ fois le facteur } a}}^{a^n} \times \overbrace{\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{m \text{ fois le facteur } a}}^{a^m} = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n+m \text{ fois le facteur } a} = a^{m+n}$

2. Cas où $n > m$: $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{\overbrace{a \times ... \times a}^{n \text{ fois}}}{\underbrace{a \times ... \times a}_{m \text{ fois}}} = \dfrac{\overbrace{\cancel{a} \times ... \times \cancel{a}}^{m \text{ fois}} \times \overbrace{a \times ... \times a}^{n-m \text{ fois}}}{\underbrace{\cancel{a} \times ... \times \cancel{a}}_{m \text{ fois}}} = a^{n-m}$

3. $(a^n)^m = \underbrace{a^n \times ... \times a^n}_{m \text{ fois}} = a^{n \times m}$

Exemples

$4^7 \times 4^5 = 4^{12}$ $\quad 6^5 \times 6^{-8} = 6^{-3}$ $\quad 5^{-6} \times 5^{-4} = 5^{-10}$

$(568^8)^6 = 568^{48}$ $\quad ((-9)^3)^{-8} = (-9)^{3\times(-8)} = (-9)^{-24}$ $\quad (26^{-5})^{-7} = 26^{(-5)\times(-7)} = 26^{35}$

$\dfrac{7^{12}}{7^9} = 7^3$ $\quad \dfrac{8^{-12}}{8^5} = 8^{-17}$ $\quad \dfrac{11^{25}}{11^{-5}} = 11^{25-(-5)} = 11^{-20}$ $\quad \dfrac{154^{-14}}{154^{-16}} = 154^{-14-(-16)} = 154^2$

III Écriture scientifique

1 Puissances de 10

Définition :

Soit n un entier positif, on a :

$$10^n = \underbrace{10 \times \ ... \ \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\ \underbrace{000\ ...\ 000}_{n \text{ zéros}} \qquad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,00...00}_{n \text{ zéros}}1$$

Exemples

$10^7 = 10\ 000\ 000$ $\quad 10^{-5} = 0,000\ 01$ $\quad 10^3 \times 10^{-10} = 10^{-7} = 0,000\ 000\ 1$

Définition :

Ces tableaux donnent différents préfixes utilisables avec les puissances de 10.

Préfixe	Symbole	Puissance	Nombre
Giga	G	10^9	milliard
Méga	M	10^6	million
kilo	k	10^3	millier
hecto	h	10^2	centaine
déca	da	10^1	dizaine

Préfixe	Symbole	Puissance	Nombre
déci	d	10^{-1}	dixième
centi	c	10^{-2}	centième
milli	m	10^{-3}	millième
micro	μ	10^{-6}	millionième
nano	n	10^{-9}	milliardième

Exemples

- Un micromètre, noté μm, correspond à un millionième de mètre, soit $10^{-6} = 0,000\,001\ m$.
- Un gigaoctet correspond à une quantité de données numériques de 10^9 octets.

2 Écriture scientifique

Définition :

L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est l'unique écriture de ce nombre de la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et n un entier relatif.

Exemples

- La distance Terre-Soleil est environ égale à 150 000 000 km soit $1,5 \times 10^8\ km$.
- La taille du virus de la grippe est d'environ 0,000 000 09 m soit $9 \times 10^{-8}\ m$
- Une année lumière correspond à 9 500 milliards de km soit $9\,500 \times 10^9\ km = 9,5 \times 10^{12}\ km$

3 Calculs avec les puissances de 10

Exemples

Effectuer les calculs ci-dessous en donnant le résultats sous la forme d'une écriture scientifique.

$$A = \frac{7 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-3}}{10^8 \times 2 \times 10^{-12} \times 2}$$

$$A = \frac{35 \times 10^1}{4 \times 10^{-4}}$$

$$A = 8,75 \times 10^5$$

$$B = \frac{20 \times 10^3 \times 4 \times 10^8}{2 \times 10^{-14} \times 10^7 \times 4}$$

$$B = \frac{80 \times 10^{11}}{8 \times 10^{-7}}$$

$$B = 10 \times 10^{18} = 10^{19}$$

$$C = \frac{90 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^{-14}}{15 \times 10^4 \times 3 \times 10^{-23}}$$

$$C = \frac{180}{45} \times \frac{10^{-26}}{10^{-19}}$$

$$C = 4 \times 10^{-7}$$

$$D = \frac{5 \times 10^8 \times 8 \times 10^{14}}{10^{-6} \times 4 \times 5 \times 10^9}$$

$$D = \frac{5 \times 8 \times 10^8 \times 10^{14}}{4 \times 5 \times 10^{-6} \times 10^9}$$

$$D = \frac{40 \times 10^{22}}{20 \times 10^{-15}}$$

$$D = \underbrace{\frac{40}{20}}_{=2} \times \underbrace{\frac{10^{22}}{10^{-15}}}_{=10^{37}}$$

$$D = 2 \times 10^{37}$$

$$E = \frac{10^{23} \times 250 \times 10^{-50} \times 4 \times 10^{-6} \times 2}{10^{12} \times 0,5 \times 10^{-8} \times 10 \times 8}$$

$$B = \frac{250 \times 4 \times 2 \times 10^{23} \times 10^{-50} \times 10^{-6}}{0,5 \times 8 \times 10^{-8} \times 10^{12} \times 10}$$

$$E = \frac{2000 \times 10^{-33}}{4 \times 10^5}$$

$$E = 500 \times 10^{-38}$$

$$E = \underbrace{5 \times 10^2}_{=500} \times 10^{-38}$$

$$E = 5 \times 10 \times 10^{-36}$$