Cours de Mathématiques

Chapitre n°3 : Comparaison et ordre des nombres décimaux

Niveau : Sixième

Année scolaire

2024 - 2025

Notions abordées :

— Nombre décimaux ;
— Comparaison et encadrement ;
— Ordre croissant et décroissant ;
— Demi-droite graduée et vocabulaire ;
— Valeur approchée, troncature et arrondi.

Compétences évaluées :

— Reconnaître, nommer, et tracer un point, une droite, une demi-droite, un segment ;
— Ranger dans l'ordre croissant (ou décroissant) une suite de nombre donnée ;
— Intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux ;
— Encadrer un nombre décimal par deux nombres entiers, par deux nombres décimaux ;
— Savoir se repérer et placer des points sur une demi-droite graduée ;
— Déterminer la valeur approchée d'un nombre (et la troncature) ;
— Savoir effectuer un arrondi avec un nombre de décimales données.

Chapitre n°3 : Comparaison et ordre des nombres décimaux

Table des matières

I Comparaison **2**
1 Relation d'ordre . . . 2
2 Ordre croissant et décroissant . . . 3

II Demi-droite graduée **4**
1 Définition . . . 4
2 Intercaler un nombre décimal . . . 4

III Approximations des nombres décimaux **5**
1 Encadrement . . . 5
2 Valeur approchée . . . 5
3 Troncature et arrondi . . . 6

Chapitre n°3 : Comparaison et ordre des nombres décimaux

L'ensemble des nombres décimaux, noté $\mathbb{D}$ est un ensemble ordonné.
C'est-à-dire que l'on peut comparer les nombres décimaux entre eux grâce à une relation d'ordre.

I Comparaison

1 Relation d'ordre

Définition :
La relation *« Inférieur ou égal à »* est une relation d'ordre.
Elle permet de comparer des nombres décimaux entre eux. On utilise alors le symbole $\leqslant$.

Remarque

La relation d'ordre *« Inférieur ou égal à »* est une relation binaire.

C'est-à-dire qu'elle met en relation deux nombres.

Propriété.
La relation d'ordre *« Inférieur ou égal à »* est une relation :

Réflexive : Un nombre est toujours inférieur ou égal à lui-même.
Autrement dit : Soit n un nombre alors on a : $n \leqslant n$.

Antisymétrique : Si deux nombres sont inférieurs ou égaux l'un à l'autre, alors ils sont identiques.
Autrement dit : Soient n_1 et n_2 deux nombres tels que : $n_1 \leqslant n_2$ et $n_2 \leqslant n_1$ alors $n_1 = n_2$.

Transitive :
Autrement dit : Soient n_1, n_2 et n_3 trois nombres tels que : $n_1 \leqslant n_2$ et $n_2 \leqslant n_3$ alors $n_1 \leqslant n_3$.

Exemple

Le nombre 10 est inférieur ou égal au nombre 30. Cela se note : $10 \leqslant 30$.

Réflexivité : $4 \leqslant 4$ Si j'ai 4 euros, j'ai bien 4 euros ou plus.

Antisymétrie : On a : $5 \leqslant \frac{50}{10}$ et $\frac{50}{10} \leqslant 5$ donc $5 = \frac{50}{10}$

Transitivité : On a : $9 \leqslant 12$ et $12 \leqslant 20$ donc $9 \leqslant 20$

Remarques

- *« Inférieur strictement »* une relation d'ordre stricte. Elle n'est pas réflexive.

- Cette partie du cours est transposable aux relations *« Supérieur ou égal »* et *« Supérieur strictement »*.

Définition :

Comparer deux nombres, c'est dire s'ils sont égaux ou si l'un est supérieur ou inférieur à l'autre.

Comparaison - Méthode

Pour comparer deux nombres en écriture décimale :

- On compare les parties entières ;
- Si elles sont égales, on compare les chiffres des dixièmes ;
- S'ils sont égaux, on compare les chiffres des centièmes ;
- Ainsi de suite.

Remarques

- Les nombres que l'on souhaite comparer ne sont pas toujours écrit sous la même forme, il est possible de transformer leur écriture pour les comparer ;

- Il est aussi possible d'écrire certains 0 inutiles ;

- Attention : Contrairement aux nombres entiers, le nombre décimal avec le plus de chiffres n'est pas forcément le plus grand.

Exemples

Comparer les nombres suivants :

$3,6 \leqslant 4,8$ en effet $3 \leqslant 4$

$\frac{75}{10} \leqslant 8,6$ en effet $\frac{75}{10} = 7,5$ et $7 \leqslant 8$

$2,892\,652 \leqslant 4,1$ en effet $2 \leqslant 4$

$13,86 \leqslant 13,92$ en effet $13 = 13$ et $8 \leqslant 9$

$6,53 \leqslant 6,7$ en effet $6 = 6$ et $5 \leqslant 7$ On peut aussi écrire : $6,7 = 6,70$ et $53 \leqslant 70$

$12,265 \leqslant \frac{12\,270}{100}$ en effet $\frac{12\,270}{100} = 12,27$ on a $12 = 12$ et $6 \leqslant 7$

On peut aussi écrire $12,27 = 12,270$ et $265 \leqslant 270$

2 Ordre croissant et décroissant

Définition :

Ranger des nombres dans l'ordre croissant signifie les ordonner du plus petit au plus grand.
Ranger des nombres dans l'ordre décroissant signifie les ordonner du plus grand au plus petit.

Exemples

Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant : 4 ; $3,2$; $4,08$; $5,57$; $5,51$

$$3,2 \leqslant 4 \leqslant 4,08 \leqslant 5,51 \leqslant 5,57$$

Ranger les nombres suivants dans l'ordre décroissant : 65,84 ; 65,9 ; 65,15 ; 66 ; 66,08

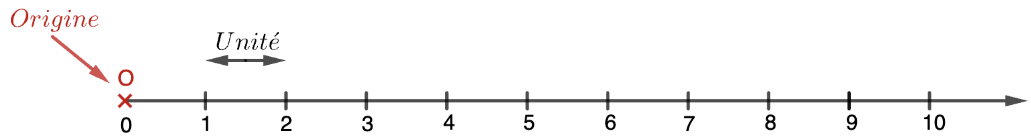
$$66,08 \geqslant 66 \geqslant 65,9 \geqslant 65,84 \geqslant 65,15$$

II Demi-droite graduée

1 Définition

Définition :

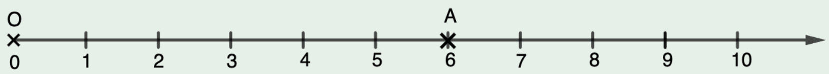
Une demi-droite graduée est une demi-droite sur laquelle on a choisi une unité de longueur, que l'on reporte régulièrement à partir de l'origine.



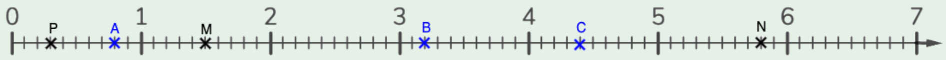
Sur une demi-droite graduée, chaque point est repéré par un nombre.

On dit que ce nombre est l'abscisse du point.

Exemples



Sur cette demi-droite graduée, l'abscisse du point A est 6. Cela se note : $A(6)$



$P(0,3)$ $M(1,5)$ $N(5,8)$

Placer les points suivants : $A(0,8)$ $B(3,1)$ $C(4,4)$

2 Intercaler un nombre décimal

Définition :

Soient n_1 et n_2 deux nombres décimaux.

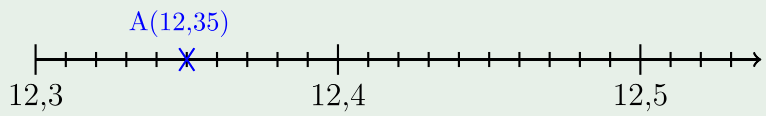
Intercaler un nombre entre n_1 et n_2 signifie trouver un nombre compris entre n_1 et n_2.

Autrement dit : Intercaler un nombre entre n_1 et n_2 c'est trouver un nombre n_3 tel que $n_1 \leqslant n_3 \leqslant n_2$.

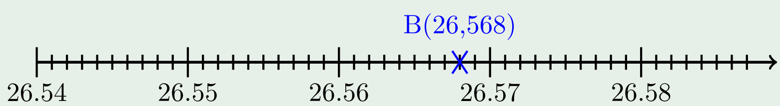
Exemples

Intercaler un nombre entre 3 et 4 : 3,6 en effet : $3 \leqslant 3,6 \leqslant 4$

Intercaler un nombre entre 12,3 et 12,4 : 12,35 en effet : $12,3 \leqslant 12,35 \leqslant 12,4$



Intercaler un nombre entre 26,56 et 26,57 : 26,568 en effet : $25,5\,6 \leqslant 25,568 \leqslant 25,57$



III Approximations des nombres décimaux

1 Encadrement

Définition :

Encadrer un nombre signifie donner une valeur inférieure et une valeur supérieure à ce nombre.

Exemples

Encadrement de 263 :	250	$\leqslant$	263	$\leqslant$	280
Encadrement à l'unité de 7,3 :	7	$\leqslant$	7,3	$\leqslant$	8
Encadrement au dixième de 8,61 :	8,6	$\leqslant$	8,61	$\leqslant$	8,7
Encadrement au centième de 25,472 :	25,47	$\leqslant$	25,472	$\leqslant$	25,48
Encadrement au centième de 14,206 53 :	14,206	$\leqslant$	14,206 53	$\leqslant$	14,207

2 Valeur approchée

Définitions :

On dit qu'un nombre est une valeur approchée d'un nombre à l'unité si la différence entre ces deux nombres ne dépasse pas 1.

Autrement dit : a est la valeur approchée à l'unité d'un nombre n si $a-1 \leqslant n \leqslant a+1$.

On dit qu'un nombre est une valeur approchée d'un nombre au dixième si la différence entre ces deux nombres ne dépasse pas 0,1.

Autrement dit : a est la valeur approchée au dixième d'un nombre n si $a-0,1 \leqslant n \leqslant a+0,1$.

Remarque

Les définitions pour des valeurs approchées au centième et au millième sont similaires.

Exemples

4 est une valeur approchée à l'unité de 4,7.

En effet : $\underbrace{4-1}_{=3} \leqslant 4,7 \leqslant \underbrace{4+1}_{=5}$

Ou : $4,7-4=0,7$ et $0,7 \leqslant 1$

8,5 est une valeur approchée au dixième de 8,53.

En effet : $\underbrace{8,5-0,1}_{=8,4} \leqslant 8,53 \leqslant \underbrace{8,5+0,1}_{=8,6}$

Ou : $8,53-8,5=0,03$ et $0,03 \leqslant 0,1$

Définitions :

Lorsque l'on donne une valeur approchée d'un nombre on parle :

- De valeur approchée par défaut si celle-ci est inférieure au nombre ;
- De valeur approchée par excès si celle-ci est supérieure.

Autrement dit : Soient n un nombre et a une valeur approchée de ce nombre.

- Si $a \leqslant n$ alors valeur approchée par défaut.
- Si $a \geqslant n$ alors valeur approchée par excès.

Exemples

Compléter le tableau suivant pour le nombre 2,628.

Rang	Encadrement	Valeur approchée par défaut	Valeur approchée par excès
À l'unité	$2 \leqslant 2,628 \leqslant 3$	2	3
Au dixième	$2,6 \leqslant 2,628 \leqslant 2,7$	2,6	2,7
Au centième	$2,62 \leqslant 2,628 \leqslant 2,63$	2,62	2,63

Justification : 3 est la valeur approchée à l'unité par excès .
Différence inférieure à 1 : $3 - 2,628 = 0,628$ et $0,628 \leqslant 1$ *Par excès :* $2,628 \leqslant 3$

Justification : 2,6 est la valeur approchée par defaut au dixième.
Différence inférieure à 0,1 : $2,628 - 2,6 = 0,028$ et $0,028 \leqslant 0,1$ *Par défaut :* $2,6 \leqslant 2,628$

3 Troncature et arrondi

Définition :

Tronquer un nombre consiste à couper l'écriture décimale de ce nombre à un certain nombre de chiffres après la virgule.
La troncature d'un nombre (positif) est sa valeur approchée par défaut.

Définition :

L'arrondi d'un nombre (positif) est, entre sa valeur approchée par défaut et sa valeur approchée par excès, celle qui la plus proche du nombre.

Exemples

Donner les encadrements, valeurs approchées, troncatures et arrondis de 5,473 6 à l'unité, au dixième, au centième et au millième.

Rang	Encadrement	Valeur approchée par défaut (**troncature**)	Valeur approchée par excès	Arrondi
À l'unité	$5 \leqslant 5,473\,6 \leqslant 6$	5	6	5
Au dixième	$5,4 \leqslant 5,473\,6 \leqslant 5,5$	5,4	5,5	5,5
Au centième	$5,47 \leqslant 5,473\,6 \leqslant 5,48$	5,47	5,48	5,47
Au millième	$5,473 \leqslant 5,473\,6 \leqslant 5,474$	5,473	5,474	5,474

Quelle est la valeur approchée au centième par excès de 21,568 et son arrondi au dixième ?

Valeur approchée au centième : 21,57.
<u>En effet :</u> $21,57 - 21,568 = 0,002$ et $0,002 \leqslant 0,01$ Par excès : $21,568 \leqslant 21,57$.

Arrondi au dixième : 21,6
Valeurs approchées par défaut et par excès au dixième : 21,5 et 21,6. 21,57 est plus proche de 21,6.

Remarque :

Par convention, l'arrondi au centième de 2,375 est 2,38.