Cours de Mathématiques

Chapitre n° 4 : Agrandissement et Réduction

Niveau : Troisième

Année scolaire

2024 - 2025

Notions abordées :

— Proportionnalité ;
— Effets d'un agrandissement et d'une réduction ;
— Triangles semblables.

Compétences évaluées :

— Construire un agrandissement ou une réduction d'une figure donnée ;
— Utiliser un rapport d'agrandissement et de réduction pour calculer (longueur, aire, volume) ;
— Résoudre des problèmes utilisant la proportionnalité dans le cadre de la géométrie.

Chapitre n° 4 : Agrandissement et Réduction

Table des matières

Chapitre n° 4 : Agrandissement et Réduction

I Définitions

Définition : *Agrandissement*

Agrandir une figure, c'est multiplier **toutes ses longueurs** par un même nombre k supérieur à 1.

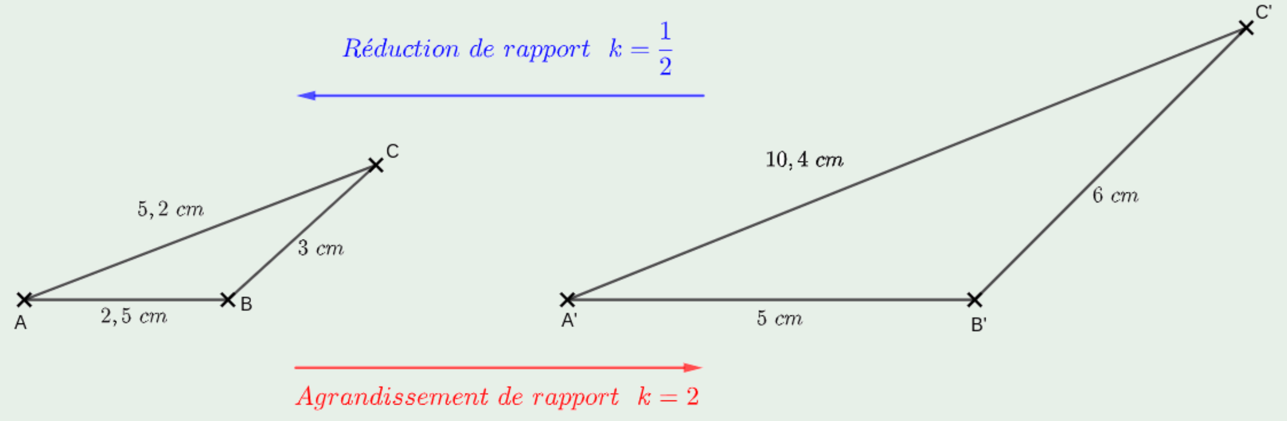
k est appelé coefficient d'agrandissement.

Définition : *Réduction*

Réduire une figure, c'est multiplier **toutes ses longueurs** par un même nombre k compris entre 0 et 1.

k est appelé coefficient de réduction.

Exemple



- Le triangle $A'B'C'$ est un agrandissement de rapport 2 du triangle ABC.
- Le triangle ABC est une réduction de rapport $\frac{1}{2}$ du triangle $A'B'C'$.

Remarques

Le coefficient k est le quotient suivant : $k = \dfrac{\text{Longueur finale}}{\text{Longueur intiale}}$

Les coefficients d'agrandissement et de réduction sont inverses l'un de l'autre.

Exemple

En considérant la figure de l'exemple précédent :

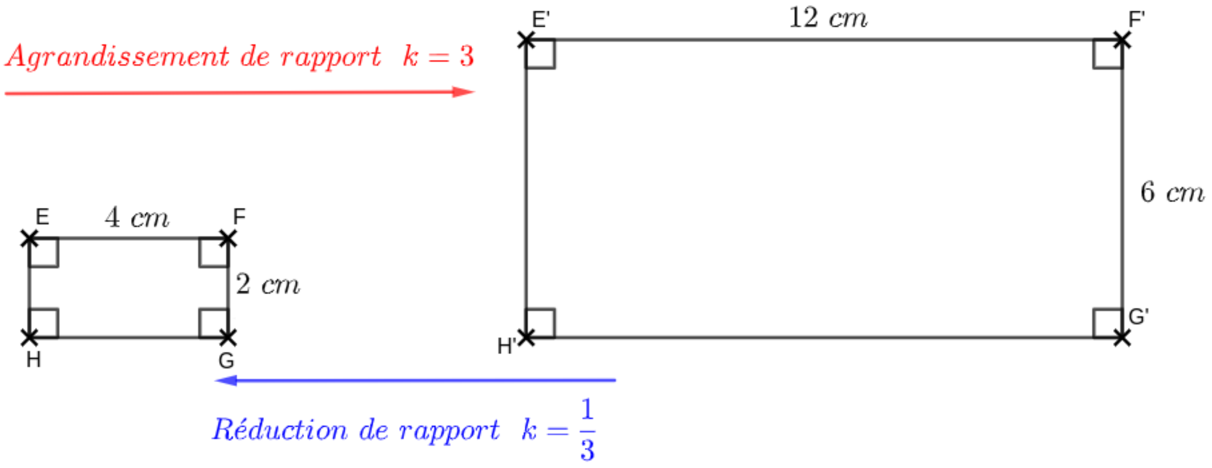
Coefficient d'agrandissement : $k = \dfrac{5}{2,5} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{10,4}{5,2} = 2$

Coefficient de réduction : $k = \dfrac{2,5}{5} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{5,2}{10,4} = \dfrac{1}{2}$

Exercice d'application

Soit $EFGH$ un rectangle tel que $EF = 4\ cm$ et $FG = 2\ cm$.

▶ Construire le rectangle $E'F'G'H'$, tel qu'il soit un agrandissement de $EFGH$ de rapport 3.



II Propriétés

1 Longueurs et angles

Propriété.

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k :

- les longueurs des deux figures sont proportionnelles ;
- les mesures d'angles sont conservées ;
- le parallélisme et l'alignement sont conservés.

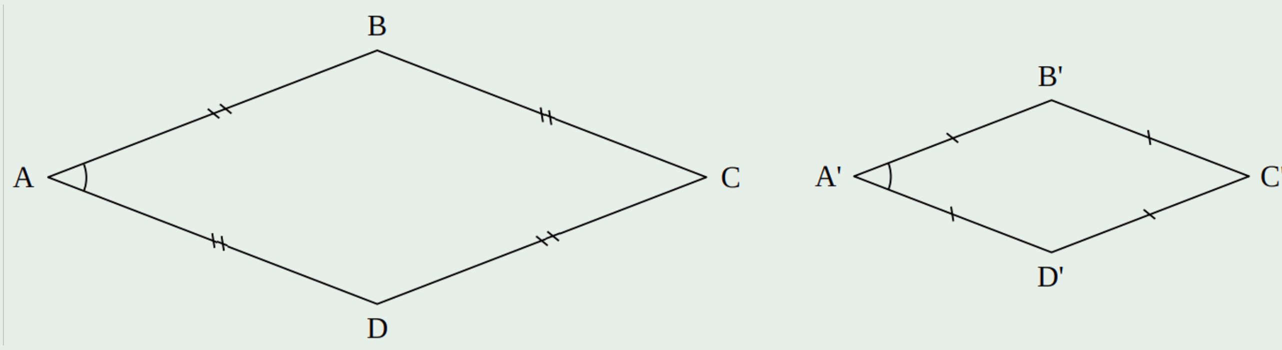
Exemple

Construire la réduction $ABCD$ de rapport $0,6$ du losange $ABCD$ tel que $AB = 5\ cm$ et $\widehat{BAD} = 42°$.

$AB = 0,6 \times AB = 0,6 \times 5\ cm = 3\ cm.$

Les autres longueurs BC', CD' et AD mesurent donc aussi $3\ cm$.

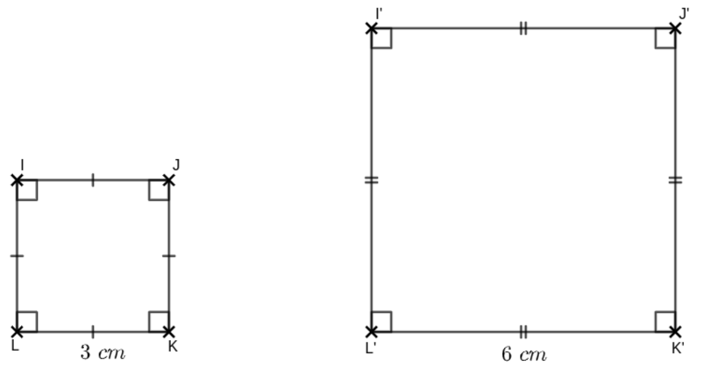
$\widehat{BAD} = \widehat{B'A'D'} = 42°$ car les mesures d'angles sont conservées lors d'une réduction.



2 Aires et volumes

Exemple introductif

$IJKL$ est un carré de côté 3 cm et $I'J'K'L'$ est un agrandissement de ce carré de rapport 2.



$\mathcal{A}_{IJKL} = LK^2$

$\mathcal{A}_{I'J'K'L'} = L'K'^2 = (2 \times LK)^2 = 2 \times LK \times 2 \times LK = 2^2 \times LK^2$.

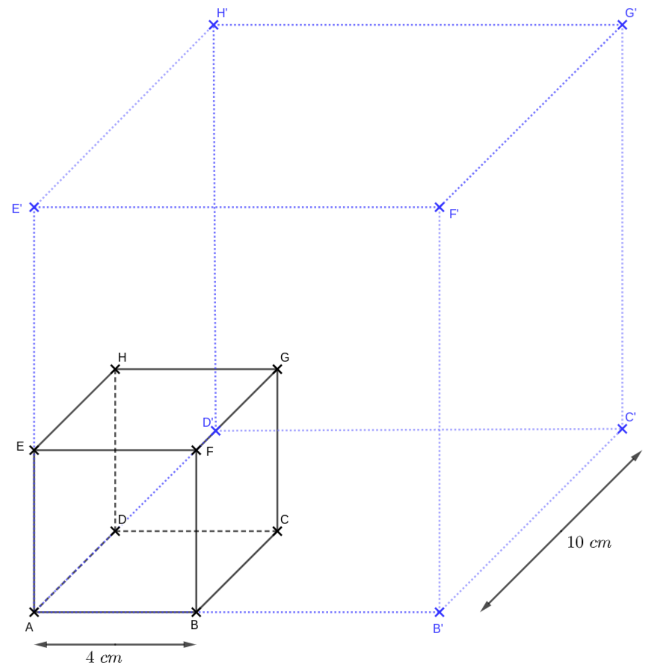
$\mathcal{A}_{IJKL} = 3^2 = 9\ cm^2$

$\mathcal{A}_{I'J'K'L'} = 6^2 = 36\ cm^2 = 4 \times 9\ cm^2 = 2^2 \times \mathcal{A}_{IJKL}$

Propriété.
Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k les **aires** sont multipliées par k^2.

Exemple introductif

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 4 cm et $AB'C'D'E'F'G'H'$ est un agrandissement de rapport $2,5$.



On note :

$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_{ABCDEFGH} = 64\ cm^3$

$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_{AB'C'D'E'F'G'H'} = 1\ 000\ cm^3$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_2 &= (B'C')^3 \\ &= (2,5 \times BC)^3 \\ &= 2,5 \times BC \times 2,5 \times BC \times 2,5 \times BC \\ &= 2,5^5 \times BC^3\end{aligned}$$

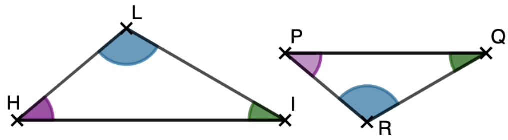
En effet : $64 \times 2,5^3 = 1\ 000$

Propriété.
Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k les **volumes** sont multipliées par k^3.

III Triangles semblables

Définition :

Des triangles semblables sont des triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.



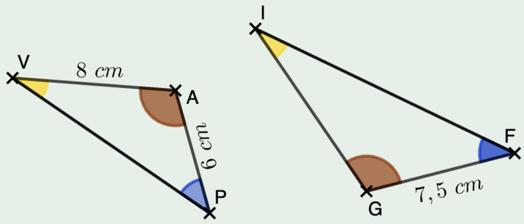
PROPRIÉTÉ.
Si deux triangles sont semblables alors les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles

Exemple

► Déterminer la longueur GI.

Les triangles VAP et IGF sont semblables car leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Les longueurs de leurs côtés sont donc proportionnelles :



Triangle VAP	VA	AP	VP
Triangle IGF	GI	GF	IF

soit

Triangle VAP	$8\ cm$	$6\ cm$	VP
Triangle IGF	GI	$7,5\ cm$	IF

On peut compléter ce tableau en utilisant l'égalité des produits en croix : $GI = \dfrac{8 \times 7,5}{6} = 10\ cm$

On pourra rédiger plus succinctement de la façon suivante :

$$\frac{VA}{GI} = \frac{AP}{GF} = \frac{VP}{IF} \quad \text{soit} \quad \frac{8}{GI} = \frac{6}{7,5} = \frac{VP}{IF} \quad \text{ainsi} \quad GI = \frac{8 \times 7,5}{6} = 10\ cm$$

PROPRIÉTÉ. *Réciproque*
Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

REMARQUE

Pour vérifier si des triangles sont semblables il faut vérifier les trois rapports de longueurs.

On regarde le rapport entre les deux plus grands côtés, les deux plus petits et celui du côté restant.

Exemple

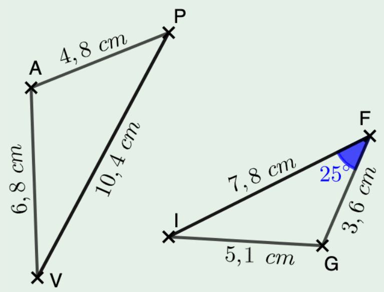
1. Montrer que ces deux triangles sont semblables.

Plus petits $\dfrac{FG}{AP} = \dfrac{3,6}{4,8} = \dfrac{3}{4}$

Plus longs $\dfrac{IF}{VP} = \dfrac{7,8}{10,4} = \dfrac{3}{4}$

Intermédiaires $\dfrac{IG}{AV} = \dfrac{5,1}{6,8} = \dfrac{3}{4}$

Les rapports sont égaux les triangles IGF et APV sont semblables.



Exemple

2. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{APV}$.

Les triangles sont semblables donc leurs angles sont deux à deux de même mesure.

$\widehat{IFG}$ et $\widehat{APV}$ sont homologues. Donc : $\widehat{IFG} = \widehat{APV} = 25°$

3. Déterminer le coefficient de réduction et d'agrandissement.

Réduction : $\dfrac{4,8}{3,6} = \dfrac{3}{4} = 0,75$ on a bien : $4,8 \times 0,75 = 3,6$

Agrandissement : $\dfrac{4,8}{3,6} = \dfrac{4}{3}$ on a bien : $3,6 \times \dfrac{4}{3} = 4,8$