Cours de Mathématiques

Chapitre n° 6 : Calcul littéral

Niveau : Cinquième (Rappels) et Quatrième

Année scolaire

2024 - 2025

Notions abordées :

— Expression littérale, simplification d'écriture,

— Substitution,

— Distributivité simple : développement, factorisation et réduction.

Compétences évaluées :

— Identifier la structure d'une expression littérale,

— Substitution dans une expression littérale,

— Connaître les propriétés de distributivités,

— Développer, factoriser et réduire une expression littérale,

— Utiliser le calcul littéral (conjecture, démonstration, ...)

— Démontrer l'équivalence de deux programmes de calcul.

Chapitre n° 6 : Calcul littéral

Table des matières

Chapitre n° 6 : Calcul littéral

Introduction

Voici deux programmes de calcul :

Programme A
• Choisir un nombre.
• Ajouter 1.
• Multiplier par 2.
• Soustraire 2.

Programme B
• Choisir un nombre.
• Ajouter 3.
• Multiplier par 4.
• Soustraire 2 fois le nombre de départ.
• Ajouter -12.

Complétons le tableau suivant :

Nombre de départ	2	3	5	10
Programme A	4	6	10	20
Programme B	4	6	10	20

• Que peut-on faire comme hypothèse concernant ces deux programmes de calcul ?
$\rightarrow$ L'objectif de ce chapitre est de réussir à démontrer cette hypothèse.

I Expression littérale

Définition :
Une expression littérale est une expression mathématique contenant une ou plusieurs lettre(s) qui désignent des nombres.

Exemples. $3x + 25$, $5y - 8z + 10$ sont des expressions littérales.

Les formules usuelles de périmètres et de volumes sont également des expressions littérales :
• Circonférence d'un cercle de rayon r : $\mathscr{P} = 2 \times r \times \pi = 2\pi r$
• Aire d'un carré de côté c : $\mathscr{A} = c \times c = c^2$

Propriété. *Simplification*
On peut simplifier une expression littérale en supprimant le signe $\times$ entre :
- un nombre et une lettre,
- deux lettres,
- une lettre et des parenthèses,
- un nombre et des parenthèses.

Exemples. •$12 \times x = 12x$ • $4 - 7 \times x + 3 \times y = 4 - 7x + 3y$ • $5 \times y \times z = 5yz$
•$4 \times (x + 2) = 4(x + 2)$ et se lit "4 **facteur de** $(x + 2)$".
•$z \times (3 - x) = z(3 - x)$ et se lit "z **facteur de** $(3 - x)$".

II Substitution

Définition :
La substitution consiste à remplacer une lettre dans une expression littérale par un nombre.

EXEMPLE. Soit l'expression littérale suivante : $R = 2x + 5 - 4x - 1$.

Calculons la valeur de R pour $x = 3$.

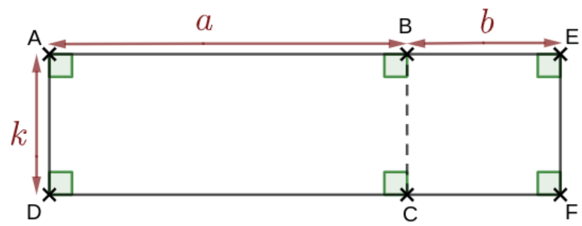
$$\begin{aligned} R &= 2 \times 3 + 5 - 4 \times 3 - 1 \\ R &= 6 + 5 - 12 - 1 \\ R &= -2 \end{aligned}$$

REMARQUE

Lorsque l'on remplace une lettre par un nombre, on écrit de nouveau les signe $\times$ qui sont simplifiés.

III Développement

• Sur la figure suivante, $ABCD$ et $BEFC$ sont des rectangles :



Quelle est l'aire du rectangle $ABCD$? $\rightarrow$ $k \times a$

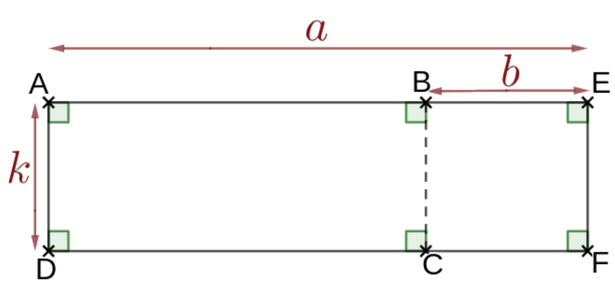
Quelle est l'aire du rectangle $BEFC$? $\rightarrow$ $k \times b$

Quelle est l'aire du rectangle $AEFD$? $\rightarrow$ $k \times (a + b)$

Comme $\mathscr{A}_{AEFD} = \mathscr{A}_{ABCD} + \mathscr{A}_{BEFC}$

Alors : $k(a + b) = k \times a + k \times b$

• Sur la figure suivante, $ABCD$ et $BEFC$ sont des rectangles :



Quelle est l'aire du rectangle $AEFD$? $\rightarrow$ $k \times a$

Quelle est l'aire du rectangle $BEFC$? $\rightarrow$ $k \times b$

Quelle est l'aire du rectangle $ABCD$? $\rightarrow$ $k \times (a - b)$

Comme $\mathscr{A}_{BCD} = \mathscr{A}_{AEFD} - \mathscr{A}_{BEFC}$

Alors : $k(a - b) = k \times a - k \times b$

Définition :
Développer une expression littérale, c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Propriété. *Formules de distributivité*
Soit a, b et k des nombres :

$$k(a+b) = ka + kb \qquad k(a-b) = ka - kb$$

Exemples. Développer les expressions :

$$\begin{aligned} C &= 5x(x+6) \\ &= 5x \times x + 5x \times 6 \\ &= 5x^2 + 30x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D &= 2x(3x-7) \\ &= 2x \times 3x - 2x \times 7 \\ &= 6x^2 - 14x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E &= -8x(-5x+10) \\ &= -8x \times (-5x) - 8x \times 10 \\ &= 40x^2 - 80x \end{aligned}$$

IV Factorisation

Définition :
Factoriser une expression littérale, c'est transformer une somme algébrique en produit.
Pour factoriser, on cherche ce que l'on appelle un facteur commun.

Propriété. *Formules de factorisation*
Soit a, b et k des nombres :

$$ka + kb = k(a+b) \qquad ka - kb = k(a-b)$$

Exemples.

$$\begin{aligned} A &= 17 \times 97 + 17 \times 3 \\ A &= 17(97+3) \end{aligned}$$

On souhaite factoriser $B = 3x + 6$. On cherche un facteur commun à $3x$ et à 6.

$$\begin{aligned} B &= 3 \times x + 3 \times 2 \\ B &= 3(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 7x - 4x^2 \\ C &= 7 \times x - 4x \times x \\ C &= x(7-4x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D &= 42y + 35y^2 \\ D &= 6 \times 7y - 5y \times 7y \\ D &= 7y(6+5y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F &= 45ax^2 - 20bx \\ F &= 9ax \times 5x - 4b \times 5x \\ F &= 5x(9ax - 4b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= 6x - 18xb \\ G &= 6x \times 1 - 6x \times 3b \\ G &= 6x(1-3b) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} H &= 7ay^2 - 9yzba^2 \\ H &= ay \times 7y - ay \times 9baz \\ H &= ay(7y - 9baz) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} I &= 70bz^2 - 140xb^2 \\ I &= 70xb \times z - 70xb \times 2b \\ I &= 70xb(z-2b) \end{aligned}$$

V Réduction

Définition :
Réduire une expression littérale c'est l'écrire avec le moins de termes possibles, en regroupant les termes de même "espèce".

Exemples.

$$\begin{array}{rcl} A & = & 3x + 9 + 10 + 8x + 5x \\ & = & 3x + 9 + 10 + 8x + 5x \\ & = & 16x + 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} B & = & 10y + 6 + 7x + 2y + 23x + 9 + y \\ & = & 10y + 6 + 7x + 2y + 23x + 9 \underbrace{+ y}_{1y} \\ & = & 13y + 30x + 15 \end{array}$$

$C = 4x^2 + 5x + 2x^2 - 3 + 10x^2 + 8x + 18$

Pour réduire cette expression on regroupe les termes en x^2, ceux en x et enfin les nombres « classiques ».

$$\begin{array}{rcl} C & = & 4x^2 + 5x - 2x^2 - 3 + 10x^2 + 8x + 18 \\ A & = & 12x^2 + 13x - 15 \end{array}$$

Attention

$3x + 2$ ne se réduit pas : $3x + 2 \neq 5x$.

En revanche $3x + 2x = 5x$

$2x^2 + 5x$ ne se réduit pas.

VI Suppression de parenthèses

Propriété.

Soit $a,\ b,\ c$ et d des nombres quelconques, alors :

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d \qquad a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

- Ajouter une somme algébrique revient à ajouter chacun de ses termes.

- Soustraire une somme algébrique revient à ajouter l'opposé de chacun de ses termes.

Exemples.

$$\begin{array}{rcl} A & = & 8 + (2 + 7 - 12) \\ A & = & 8 + 2 + 7 - 12 \\ A & = & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} B & = & 4 - (5 - 3 + 11) \\ B & = & 4 - 5 + 3 - 11 \\ B & = & -9 \end{array}$$

Exemples.

$$\begin{array}{rcl} A & = & 8 + (x + 7x^2 - 12) \\ A & = & 8 + x + 7x^2 - 12 \\ A & = & 7x^2 + x - 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} B & = & 4x - (5 - 3x^2 + 11x) \\ B & = & 4x - 5 + 3x^2 - 11x \\ B & = & 3x^2 - 7x - 5 \end{array}$$

Retour sur l'introduction

Pour chacun des programmes, on choisit un nombre quelconque que l'on notera x.

Programme A	
• Choisir un nombre.	x
• Ajouter 1.	$x+1$
• Multiplier par 2.	$2(x+1)$
• Soustraire 2.	$2(x+1)-2$
	$=2x+2-2$
	$=2x$

Programme B	
• Choisir un nombre.	x
• Ajouter 3.	$x+3$
• Multiplier par 4.	$4(x+3)$
• Soustraire 2 fois le nombre de départ.	$4(x+3)-2x$
• Ajouter -12.	$4(x+3)-2x-12$
	$=\ 4x+12-2x-12$
	$=\ 2x$

On vient de montrer que pour chaque programme, le nombre obtenu est toujours le double du nombre choisit au départ.