# Cours de Mathématiques

Chapitre n° 5 : Calcul littéral

Niveau : Quatrième (Rappels) et Troisième

## Année scolaire

2023 - 2024

### Notions abordées :

- Expression littérale, simplification d'écriture,
- Substitution,
- Distributivité simple : développement, factorisation et réduction,
- Double distributivité,
- Identité remarquable.

### Compétences évaluées :

- Identifier la structure d'une expression littérale,
- Substitution dans une expression littérale,
- Connaître les propriétés de distributivités,
- Développer, factoriser et réduire une expression littérale,
- Utiliser le calcul littéral (conjecture, démonstration, ...)
- Démontrer l'équivalence de deux programmes de calcul.

# Chapitre n° 5 : Calcul littéral

## Table des matières

# Chapitre n° 5 : Calcul littéral

## I Rappels

### 1 Expression littérale

**Définition :**
Une expression littérale est une expression mathématique contenant une ou plusieurs lettre(s) qui désignent des nombres.

EXEMPLES. $3x + 25$, $5y - 8z + 10$ sont des expressions littérales.

Les formules usuelles de périmètres et de volumes sont également des expressions littérales :
- Circonférence d'un cercle de rayon $r$ : $\mathscr{P} = 2 \times r \times \pi = 2\pi r$
- Aire d'un carré de côté $c$ : $\mathscr{A} = c \times c = c^2$

PROPRIÉTÉ. *Simplification*

On peut simplifier une expression littérale en supprimant le signe $\times$ entre :
- un nombre et une lettre,
- deux lettres,
- une lettre et des parenthèses,
- un nombre et des parenthèses.

EXEMPLES. •$12 \times x = 12x$ • $4 - 7 \times x + 3 \times y = 4 - 7x + 3y$ • $5 \times y \times z = 5yz$

•$4 \times (x + 2) = 4(x + 2)$ et se lit "4 **facteur de** $(x + 2)$".

•$z \times (3 - x) = z(3 - x)$ et se lit "$z$ **facteur de** $(3 - x)$".

### 2 Substitution

**Définition :**
La substitution consiste à remplacer une lettre dans une expression littérale par un nombre.

EXEMPLE. Soit l'expression littérale suivante : $R = 2x + 5 - 4x - 1$.

Calculons la valeur de $R$ pour $x = 3$.

$$\begin{aligned} R &= 2 \times 3 + 5 - 4 \times 3 - 1 \\ R &= 6 + 5 - 12 - 1 \\ R &= -4 \end{aligned}$$

REMARQUE

Lorsque l'on remplace une lettre par un nombre, on écrit de nouveau les signe $\times$ qui sont simplifiés.

## 3 Développement

**Définition :**
Développer une expression littérale, c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Propriété. *Formules de distributivité*
Soit $a, b$ et $k$ des nombres :

$$k(a+b) = ka + kb \qquad k(a-b) = ka - kb$$

Exemples. Développer les expressions :
$C = 5x(x+6)$ et $D = -2x(3x-7)$

$$\begin{aligned} C &= 5x(x+6) \\ &= 5x \times x + 5x \times 6 \\ &= 5x^2 + 30x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= -2x(3x-7) \\ &= -2x \times 3x - (-2x) \times 7 \\ &= -6x^2 + 14x \end{aligned}$$

## 4 Factorisation

**Définition :**
Factoriser une expression littérale, c'est transformer une somme algébrique en produit.

Pour factoriser, on cherche ce que l'on appelle un facteur commun.

Propriété. *Formules de factorisation*
Soit $a, b$ et $k$ des nombres :

$$ka + kb = k(a+b) \qquad ka - kb = k(a-b)$$

Exemples. On souhaite factoriser $C = 3x + 6$.
On cherche un facteur commun à $3x$ et à $6$.

$$\begin{aligned} C &= 3 \times x + 3 \times 2 \\ C &= 3(x+2) \end{aligned}$$

On souhaite factoriser $D = 7x - 4x$.
On cherche un facteur commun à $7x$ et à $4x$.

$$\begin{aligned} D &= 7 \times x - 4 \times x \\ D &= x(7-4) \\ D &= 3x \end{aligned}$$

## 5 Réduction

**Définition :**
Réduire une expression littérale c'est l'écrire avec le moins de termes possibles.

On regroupe les termes de même "espèce".

Exemple. $A = 4x^2 + 5x + 2x^2 - 3 + 10x^2 + 8x + 18$

Pour réduire cette expression on regroupe les termes en $x^2$, ceux en $x$ et enfin les nombres "classiques".

$$\begin{aligned} A &= 4x^2 + 5x - 2x^2 - 3 + 10x^2 + 8x + 18 \\ A &= 12x^2 + 13x - 15 \end{aligned}$$

## 6 Suppression de parenthèses

Propriété.
Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ des nombres quelconques, alors :

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d \qquad a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

- Ajouter une somme algébrique revient à ajouter chacun de ces termes.
- Soustraire une somme algébrique revient à ajouter l'opposé de chacun de ces termes.

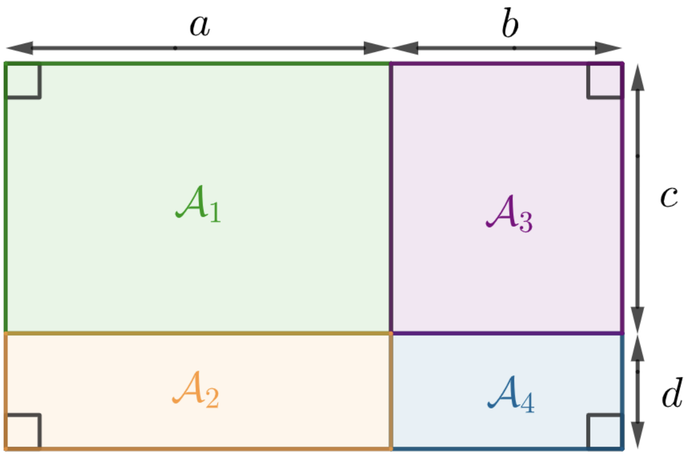
Exemples.

$$\begin{aligned} A &= 8 + (x + 7x^2 - 12) \\ A &= 8 + x + 7x^2 - 12 \\ A &= 7x^2 + x - 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B &= 4x - (5 - 3x^2 + 11x) \\ B &= 4x - 5 + 3x^2 - 11x \\ B &= 3x^2 - 7x - 5 \end{aligned}$$

# II Double distributivité

## 1 Introduction

Voici un grand rectangle que l'on découpe de façon à obtenir 4 rectangles, plus petits, à l'intérieur.




► Calculons les aires de ces quatre rectangles.

$\mathcal{A}_1 = a \times c = ac$ $\qquad$ $\mathcal{A}_3 = bc$

$\mathcal{A}_2 = ad$ $\qquad$ $\mathcal{A}_4 = bd$

► Calculons l'aire du grand rectangle.

$\mathcal{A}_{rectangle} = L \times l = (a+b) \times (c+d)$

► L'aire du grand rectangle peut aussi s'obtenir en additionnant les aires des quatre petits rectangles :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{rectangle} &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4\\ &= ac + ad + bc + bd\end{aligned}$$

**Ainsi :**

$$\boxed{(a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd}$$

## 2 Formule

Propriété. *Formule de double distributivité*

Soit $a$, $b$ $c$ et $d$ quatre nombres quelconques :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples.

$$\begin{aligned}A &= (3x+5)(x+7)\\ &= 3x^2 + 21x + 5x + 35\\ &= 3x^2 + 26x + 35\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= (4+11x)(8x-2)\\ &= 32x - 8 + 88x^2 - 22x\\ &= 88x^2 + 10x - 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= (-2x+9)(10-4x)\\ &= -20x + 8x^2 + 90 - 36x\\ &= 8x^2 - 56x + 90\end{aligned}$$

# III Identités remarquables

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a^2 - ab - ba + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= (a+b)(a-b)\\ &= a^2 \cancel{-ab} \cancel{+ba} - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

**Propriété.** *Identités remarquables*

Soit $a$ et $b$ des nombres quelconques :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

**Exemples.**

$$\begin{aligned} A &= (x+3)^2 \\ &= x^2 \ + \ 2 \times x \times 3 \ + \ 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2x+5)^2 \\ &= (2x)^2 \ + \ 2 \times 2x \times 5 \ + \ 5^2 \\ &= 4x^2 + 20x + 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (x-4)^2 \\ &= x^2 \ - \ 2 \times x \times 4 \ + \ 4^2 \\ &= x^2 - 8x + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (3x-1)^2 \\ &= (3x)^2 \ + \ 2 \times 3x \times 1 \ + \ 1^2 \\ &= 9x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= (x-6)(x+6) \\ &= x^2 - 6^2 \\ &= x^2 - 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (5x+2)(5x-2) \\ &= (5x)^2 - 2^2 \\ &= 25x^2 - 4 \end{aligned}$$

## IV Factorisation

**Exemples.**

$$\begin{aligned} G &= (4x+2)(5x-3) + (4x+2)(-6+10x) \\ &= (4x+2)\left[(5x-3) + (-6+10x)\right] \\ &= (4x+2)[5x-3-6+10x] \\ &= (4x+2)[15x-9] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= (-10x+7)(6x+8) - (8x+11)(-10x+7) \\ &= (-10x+7)[(6x+8) - (8x+11)] \\ &= (-10x+7)[6x+8-8x-11] \\ &= (-10x+7)[-2x-3] \end{aligned}$$

**Remarque**

On utilise aussi les identités remarquables pour factoriser

**Exemples.**

$$\begin{aligned} I &= x^2 + 12x + 36 \\ &= x^2 \ + \ 2 \times x \times 6 \ + \ 6^2 \\ &= (x+6)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= 16x^2 - 40x + 25 \\ &= (4x)^2 \ - \ 2 \times 4x \times 5 \ + \ 5^2 \\ &= (4x-5)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= x^2 - 100 \\ &= (x+10)(x-10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \underbrace{(2x+3)^2}_{A^2} - \underbrace{100}_{B^2} \\ &= \underbrace{[2x+3-10]}_{A-B}\underbrace{[2x+3+10]}_{A+B} \\ &= [2x-7][2x+13] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \underbrace{(5+2x)^2}_{A^2} - \underbrace{(-3x+7)^2}_{B^2} \\ &= \underbrace{[(5+2x)-(-3x+7)]}_{A-B}\underbrace{[(5+2x)+(-3x+7)]}_{A+B} \\ &= [5+2x+3x-7][5+2x-3x+7] \\ &= [5x-2][-x+12] \end{aligned}$$