Cours de Mathématiques

Chapitre n° 6 : Théorème de Thalès

Niveau : Troisième

Année scolaire

2024 - 2025

Notions abordées :

— Théorème de Thalès (configurations des triangles emboîtés et papillons) ;
— Réciproque et contraposée du théorème de Thalès ;
— Lien avec la proportionnalité.

Compétences évaluées :

— Utiliser le théorème de Thalès pour calculer une longueur ;
— Démontrer que des droites sont parallèles avec la réciproque du théorème de Thalès ;
— Démontrer que des droites ne sont pas parallèles en utilisant la contraposée du théorème e Thalès ;
— Résoudre des problèmes utilisant la proportionnalité dans le cadre de la géométrie.

Chapitre n° 6 : Théorème de Thalès

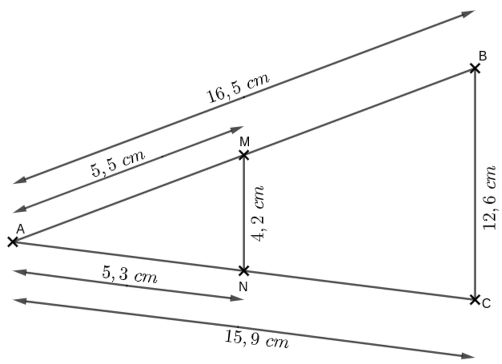
Table des matières

Chapitre n° 6 : Théorème de Thalès

Introduction

Sur la figure suivante :

- Les points A, M, B sont alignés (dans cet ordre) ;
- Les points A, N, C sont alignés (dans cet ordre) ;
- Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



On a alors deux triangles, AMN et ABC dits **emboîtés**.

• On associe, par paire, les côtés de ces triangles :

Triangle AMN	$[AN]$	$[AM]$	$[MN]$
Triangle ABC	$[AC]$	$[AB]$	$[BC]$

▶ Calculons les rapports des côtés des triangles :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{5,3}{15,9} = \frac{1}{3} \qquad \frac{AM}{AB} = \frac{5,5}{16,5} = \frac{1}{3} \qquad \frac{MN}{BC} = \frac{4,2}{12,6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AC}{AN} = \frac{15,9}{5,3} = 3 \qquad \frac{AB}{AM} = \frac{16,5}{5,5} = 3 \qquad \frac{BC}{MN} = \frac{12,6}{4,2} = 3$$

Conclusion :

Les rapports sont égaux, on a :

$$\boxed{\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}} \quad \textbf{et} \quad \boxed{\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN}}$$

- Le triangle ABC est un agrandissement de rapport 3 du triangle AMN.

- Le triangle ANM est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ du triangle ABC.

▶ Les longueurs de ces triangles sont **proportionnelles**.

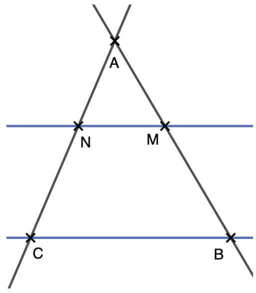
I Théorème de Thalès

1 Configuration de Thalès

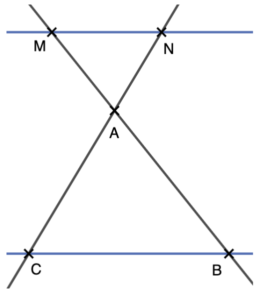
Définition :

On appelle configuration des Thalès, les deux configuration ci contre dans lesquelles :

- Les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A ;
- Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



emboîtés



papillon

2 Théorème

Théorème

On considère deux triangles ABC et AMN formés par :
- Les droites (MB) et (NC) sécantes en A ;
- Les droites (MN) et (BC) qui sont parallèles.

On a alors : $$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

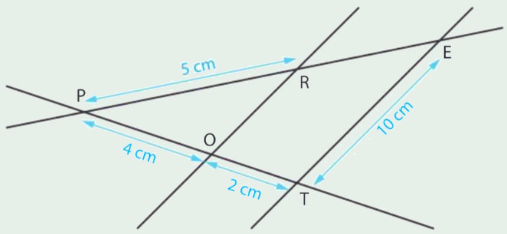
Remarque : Le théorème s'applique dans l'une des deux configurations de Thalès.

Exemple

Les droites (OR) et (TE) sont parallèles.

▶ Déterminer les longueur OR et PE.

- Les points P, R, E et P, O, T sont alignés dans cet ordre ;
- $(OR) /\!/ (TE)$.



Le théorème de Thalès s'écrit : $\dfrac{OP}{TP} = \dfrac{PR}{PE} = \dfrac{OR}{TE}$

On remplace maintenant, dans ces égalités , les longueurs que l'on connaît : $\dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{PE} = \dfrac{OR}{10}$

On peut désormais déterminer les longueurs OR et PE grâce au produit en croix :

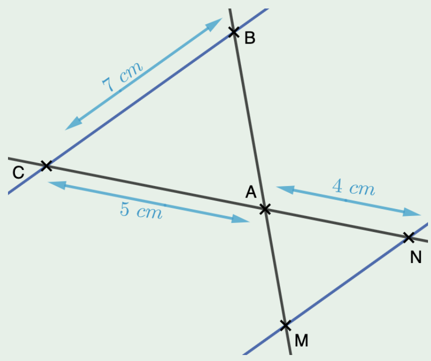
$$PE = \frac{PR \times TP}{OP} = \frac{5 \times 6}{4} = 7,5 \qquad OR = \frac{TE \times OP}{TP} = \frac{10 \times 4}{6} = 6,7$$

Ainsi : $PE = 7,5\ cm$ et $OR \simeq 6,7\ cm$.

Exemple

Sur cette figure les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

▶ Calculer la longueur MN.



- (CN) et (MB) sont sécantes en A ;
- (BC) // (MN)

Le théorème de Thalès s'écrit :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \qquad \text{Soit :} \qquad \frac{AM}{AB} = \frac{4}{5} = \frac{MN}{7}$$

Grâce au produit en croix : $MN = \dfrac{AN \times BC}{AC} = \dfrac{4 \times 7}{5} = 5,6\ cm$

II Réciproque et contraposée du théorème de Thalès

1 Réciproque

Théorème

Si ABC et AMN sont deux triangles tels que :

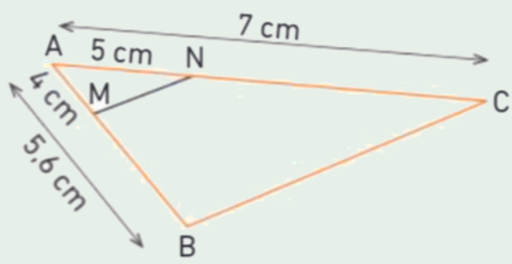
- Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans cet ordre ;
- $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

Alors : les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Remarque : Cette réciproque n'en est pas réellement une car il suffit d'avoir simplement les deux rapports $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$.

Exemple

▶ Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans cet ordre.

D'une part : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4}{5,6} = \dfrac{5}{7}$ D'autre part : $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{5}{7}$

On a : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

Donc : d'après la réciproque du théorème de Thalès (MN) // (BC).

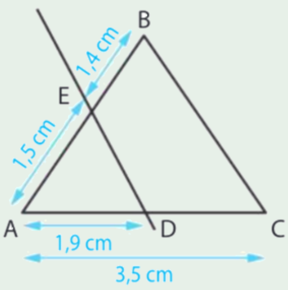
2 Contraposée

Théorème

Soient ABC et AMN sont deux triangles tels que les points $A,\ M,\ B$ et $A,\ N,\ C$ sont alignés dans cet ordre.
Si deux des rapports $\dfrac{AM}{AB}$, $\dfrac{AN}{AC}$ ou $\dfrac{MN}{BC}$ ne sont pas égaux alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Exemples

► Les droites (DE) et (BC) sont-elles parallèles ?



Les points $A,\ E,\ B$ et $A,\ D,\ C$ sont alignés dans cet ordre.

D'une part : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1,5}{2,9} = \dfrac{15}{29}$ D'autre part : $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{1,9}{3,5} = \dfrac{19}{35}$

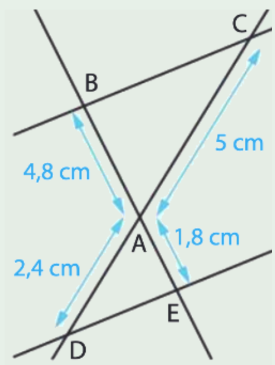
Pour vérifier si ces deux fractions sont égales, on peut utiliser l'égalité des produits en croix :

On a : $15 \times 35 \neq 19 \times 29$

Donc : $\dfrac{AE}{AB} \neq \dfrac{AD}{AC}$

Donc : d'après la contraposée du théorème de Thalès (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.

► Montrer que les droites (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.



Les points $B,\ A,\ E$ et $C,\ A,\ D$ sont alignés dans cet ordre.

D'une part : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1,8}{4,8} = 0,375$

D'autre part : $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{2,4}{5} = 0,48$

On a : $\dfrac{AE}{AB} \neq \dfrac{AD}{AC}$

Donc : d'après la contraposée du théorème de Thalès (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.