Cours de Mathématiques

Chapitre n°7 : Multiplication et division

Niveau : Sixième

Année scolaire

2024 - 2025

Notions abordées :

— Opérations et priorités avec parenthèses ;
— Multiplication et division de nombres entiers et décimaux ;
— Division euclidienne ;
— Ordre de grandeurs ;
— Calculs astucieux ;
— Problèmes avec conversions.

Compétences évaluées :

— Poser et effectuer des multiplications et des divisions (décimales et euclidienne) ;
— Écrire l'égalité de la division euclidienne ;
— Utiliser la distributivité simple dans les deux sens ;
— Donner un ordre de grandeur d'un résultat ;
— Résoudre des problèmes avec de multiplications et des divisions ;
— Donner une expression (avec ou sans parenthèses) afin de répondre à un problème.

Chapitre n°7 : Multiplication et division

Table des matières

Chapitre n°7 : Multiplication et division

I Multiplication

1 Définitions et propriétés

Définition :

Multiplier un entier par un autre c'est ajouter cet entier à lui-même plusieurs fois.

Autrement dit : Soient a et b deux nombres entiers : $a \times b = \underbrace{a + a + ... + a}_{b \text{ fois}}$

Définition :

Les nombres qui interviennent dans une multiplication s'appellent des facteurs.

Le résultat d'une multiplication s'appelle un produit.

Propriété.

La multiplication est commutative.

Soient n_1 et n_2 deux nombres quelconques.

On a : $n_1 \times n_2 = n_2 \times n_1$.

Propriété.

1 est l'élément neutre de la multiplication.

Soit n un nombre quelconque.

On a : $n \times 1 = n$.

Propriété.

La multiplication est une opération associative.

Soient n_1, n_2 et n_3 trois nombres quelconques. On a : $(n_1 \times n_2) \times n_3 = n_1 \times (n_2 \times n_3)$

Propriété.

La multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction.

Soient n_1, n_2 et n_3 trois nombres quelconques. On a : $n_1 \times (n_2 + n_3) = n_1 \times n_2 + n_1 \times n_3$

Remarques

- La commutativité de la multiplications permet, lorsqu'il y a plusieurs multiplication, d'effectuer les calculs dans l'ordre souhaité. On parle alors de calcul astucieux.
- Il est possible de décomposer certains facteurs pour faciliter le calcul.

Exemples

$5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$

$4 \times 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$

20 est le produit des facteurs 4 et 5.

$$\begin{aligned} A &= 4 \times 5 \times 0,25 \times 20 \\ A &= 4 \times 0,25 \times 5 \times 20 \\ A &= 1 \times 100 \\ A &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 8 \times 25 \times 3 \\ B &= 2 \times 4 \times 25 \times 3 \\ B &= 2 \times 3 \times 4 \times 25 \\ B &= 6 \times 100 \\ B &= 600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (5 \times 6) \times 2 \\ C &= 30 \times 2 \\ C &= 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 5 \times (6 \times 2) \\ D &= 5 \times 12 \\ D &= 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 15 \times (4 + 3) \\ E &= 15 \times 4 + 15 \times 3 \\ E &= 60 + 45 \\ E &= 105 \end{aligned}$$

2 Multiplication posée

Pour poser une multiplication :

- On calcule chaque ligne en multipliant chaque chiffre du deuxième nombre par le premier nombre, sans tenir compte d'éventuelles virgules ;
- On additionne les différentes lignes ;
- S'il y en a, on repositionne la virgule en fonction du nombre de chiffres après la virgules dans les facteurs initiaux.

Exemples

$$\begin{array}{rrrrr} & & 5 & 7 & 3 \\ \times & & & 2 & 4 \\ \hline & 2 & 2 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 6 & \cdot \\ \hline 1 & 3 & 7 & 5 & 2 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr} & & 8 & 7, & 2\;\;8 \\ \times & & & 7 & 2 \\ \hline & 1 & 7 & 4 & 5\;\;6 \\ 6 & 1 & 0 & 9 & 6\;\;\cdot \\ \hline 6 & 2 & 8 & 4, & 1\;\;6 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr} & 4, & 2 & 6 \\ \times & & 8, & 5 \\ \hline & 2 & 1\;\;3 & 0 \\ 3 & 4 & 0\;\;8 & \cdot \\ \hline 3 & 6, & 2\;\;1 & 0 \end{array}$$

3 Multiplication par 10 : 100 ; ... ; 0,1 ; 0,01 ; ...

34×10 signifie que l'on a 34 dizaines donc cela donne 340.

$2,3 \times 10$ signifie que l'on a 2 dizaines (20) et 3 dixièmes de dizaines (3 unités) cela donne 23.

462×100 signifie que l'on a 462 centaines donc cela donne 4 620.

$43,46 \times 100$: 43 centaines (4 300) + 4 dixièmes de centaines (40) + 6 centièmes de centaines (6) : 4 346.

$120 \times 0,1$ signifie que l'on a 120 dixièmes donc cela donne 12.

$42,3 \times 0,1$ signifie que l'on a 42 dixièmes (4,2) et 3 dixièmes de dixième (0,03) cela donne 4,23.

$387 \times 0,01$ signifie que l'on a 387 centièmes donc cela donne 3,87.

$2\ 743,6 \times 0,01$: 2743 centièmes (27,43) + 6 centièmes de dixième (0,006) : 27,436.

À retenir :

Lorsque l'on multiplie un nombre par 10, 100, ... chaque chiffre est décalé d'un rang vers la **gauche**.

Chaque chiffre a une valeur 10, 100, ... fois plus grande.

Le chiffre des centièmes devient le chiffre des dixièmes, ... , le chiffre des centaines devient le chiffre des milliers, etc.

Lorsque l'on multiplie un nombre par 0,1 ; 0,01 ; ... chaque chiffre est décalé d'un rang vers la **droite**.

Chaque chiffre a une valeur 10, 100, ... fois plus petite.

Le chiffre des centième devient le chiffre des millièmes, ... , le chiffre des centaines devient le chiffre des dizaines, etc.

II Division euclidienne

1 Multiple et diviseur

Définition :

Soient a et b deux nombres entiers positifs.

On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier positif k tel que $a = bk$.

Dans ce cas b et k sont des diviseurs de a.

On dit que a est divisible par b et k.

Remarque :

- a est divisible par b si a est dans la table de b.
- b est un diviseur de a si a est dans la table de b.

Exemples

27 est un multiple de 9 car $27 = 9 \times 3$.

9 et 3 sont des diviseurs de 27.

27 est divisible par 9 (et par 3).

60 est un multiple de 5 car $60 = 5 \times 12$.

5 et 12 sont des diviseurs de 60.

60 est divisible par 5 (et par 12).

Attention

Il ne faut pas confondre multiple et diviseur : $100 \underset{\text{est un multiple de}}{\overset{\text{est un diviseur de}}{\rightleftarrows}} 20$

2 Critères de divisibilité

Propriété.

- Si le chiffre des unités d'un nombre est 0, 2, 4, 6 ou 8, alors il est divisible par 2 ;
- Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3, alors il est divisible par 3 ;
- Si les deux derniers chiffres d'un nombre forme un nombre divisible par 4 alors il est divisible par 4 ;
- Si un nombre a pour chiffre des unités 0 ou 5 alors il est divisible par 5 ;
- Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 9 alors il est divisible par 9 ;
- Si un nombre à pour chiffre des unités 0 alors il est divisible par 10.

Exemples

Divisible par 2 : $3\underline{4}$; $85\underline{6}$; $215\underline{0}$

Divisible par 3 : 315 $(3+1+5 = 9 = 3 \times 3)$; 5241 $(5+2+4+1 = 12 = 3 \times 4)$

Divisible par 4 : $6\underline{12}$ $(12 = 4 \times 3)$; $21\ 8\underline{40}$ $(40 = 4 \times 10)$

Divisible par 5 : $6\underline{5}$; $35\underline{0}$; $10\ 47\underline{5}$

Divisible par 9 : 855 $(8+5+5 = 18 = 9 \times 2)$; 631 854 $(6+3+1+8+5+4 = 27 = 9 \times 3)$

Divisible par 10 : $8\underline{0}$; $96\underline{0}$; $97\ 82\underline{0}$

3 Division euclidienne

Définition :

Soient a et b deux entiers positifs avec $b \neq 0$.

Effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver les deux entiers q et r tel que :

$$a = bq + r \qquad \text{avec} \quad 0 \leq r < b$$

a est le dividende $\quad$ b est le diviseur

q est le quotient $\quad$ r est le reste.

$$\begin{array}{rr|cl} \text{dividende} \rightarrow & a & b & \leftarrow \text{diviseur} \\ \cline{3-3} & & q & \leftarrow \text{quotient} \\ & & & \\ \text{reste} \rightarrow & r & & \end{array}$$

Exemple

Effectuer la division euclidienne de 256 par 12 :

$$\begin{array}{rcccc|ccc} & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 & 2 & \\ \cline{6-8} - & 2 & 4 & & & 2 & 3 & 6 \\ \cline{2-3} & & 4 & 3 & & & & \\ & - & 3 & 6 & & & & \\ \cline{3-4} & & & 7 & 6 & & & \\ & & - & 7 & 2 & & & \\ \cline{4-5} & & & & 4 & & & \end{array}$$

$2\,836 \;=\; 12 \times 236 + 4$

236 est le quotient et 4 le reste $\quad 0 \leq 4 < 12$

Remarque

Dans une division euclidienne, le reste est toujours inférieur au diviseur.

Toutes les égalités de la forme $a = bq + r$ ne correspondent pas forcément à une division euclidienne.

$23 = 5 \times 3 + 8$ ne correspond pas à la division euclidienne de 23 par 5, en effet $\quad 5 < 8$.

4 Application

Exemple

Au réfectoire d'un collège, les élèves doivent former des tables complètes de 12 élèves. 173 élèves rentrent dans le self.

1. Quel est le nombre de tables complètes.

$$\begin{array}{rccc|cc} & 1 & 7 & 3 & 1 & 2 \\ \cline{5-6} - & 1 & 2 & & 1 & 4 \\ \cline{2-3} & & 5 & 3 & & \\ & - & 4 & 8 & & \\ \cline{3-4} & & & 5 & & \end{array}$$

On effectue la division euclidienne de 173 par 12.

$173 = 12 \times 14 + 5$

Il y a 14 tables complètes.

2. Combien y a-t-il d'élèves dans la table incomplète.

Il y a 5 élèves sur la table incomplète.

3. Quel est le nombre de tables occupées ?

Il y a 15 tables occupées.

4. Combien reste-t-il de place à la table incomplète ?

Il reste $12 - 5 = 7$ place sur la table incomplète.

Remarque : La division euclidienne est souvent utilisé dans des problèmes de durées, on est amené à effectuer des divisions par 60, par 24, ...

III Division décimale

1 Définition

Définition :

Soient a et b deux nombres positifs tel que $b \neq 0$.

Effectuer la division décimale de a par b consiste à détermine le quotient q tel que $a = b \times q$.

Autrement dit : $a \div b = q$ signifie que $a = b \times q$

Remarque

Le quotient n'est pas toujours un nombre décimal (il ne tombe « pas juste »), dans ce cas on utilise l'écriture fractionnaire : $q = \dfrac{a}{b}$.

Dans ce cas : $\dfrac{a}{b} \times b = a$. On peut donner un encadrement ou une valeur approchée de ce quotient.

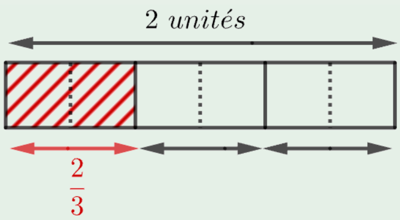
Exemples

$10 \div 4 = 2,5$ en effet : $4 \times 2,5 = 10$

$28,5 \div 3 = 9,5$ en effet : $3 \times 9,5 = 28,5$

$2 \div 3 = 0,6666.....$ le quotient ne tombe pas juste.

Dans ce cas on note : $2 \div 3 = \dfrac{2}{3}$. On a : $\dfrac{2}{3} \times 3 = 2$



Valeur approchée au centième : $2 \div 3 \simeq 0,67$

Encadrement au dixième : $0,6 < \dfrac{2}{3} < 0,7$

2 Division décimale posée

À retenir : Lorsque l'on abaisse le chiffre des dixièmes du dividende, on place une virgule au quotient.

Exemples

$$\begin{array}{rcccccc|l}
 & 1 & 4 & 6 & & & & 8 \\ \cline{8-8}
- & & 8 & & & & & 1\;8,2\;5 \\ \cline{2-3}
 & & 6 & 6 & & & & \\
- & & 6 & 4 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & 0 & & & \\
- & & & 1 & 6 & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 4 & 0 & & \\
- & & & & 4 & 0 & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 & &
\end{array}$$

$146 \div 8 = \dfrac{146}{8} = 18,25$

$$\begin{array}{rcccccc|l}
 & 2 & 6, & 5 & & & & 3 \\ \cline{8-8}
- & 2 & 4 & 0 & & & & 8,8\underbrace{3\;3}_{repetition}.... \\ \cline{2-4}
 & & 2 & 5 & 0 & & & \\
- & & 2 & 4 & 0 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 1 & 0 & 0 & & \\
- & & & & 9 & 0 & & \\ \cline{4-6}
 & & & & 1 & 0 & 0 & \\
- & & & & & 9 & 0 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & 1 & 0 & \\
 & & & & & \dots & &
\end{array}$$

$26,5 \div 3 \simeq 8,83$

3 Division par 10 : 100 ; ... ; 0,1 ; 0,01 ; ...

$340 \div 10 = 34$	car il y a 34 dizaines dans 340	$(340 = 34 \times 10)$.
$465 \div 10 = 46,5$	car il y a 46,5 dizaines dans 465	$(465 = 46,5 \times 10)$.
$308 \div 100 = 3,08$	car il y a 3,08 centaines dans 308	$(308 = 3,08 \times 100)$.

$2 \div 0,1 = 20$	car il y a 20 dixièmes dans 2 unités	$(2 = 20 \times 0,1)$
$14,8 \div 0,1 = 148$	car il y a 148 dixièmes dans 14,8	$(14,8 = 148 \times 0,1)$
$30,82 \div 0,01 = 3\ 082$	car il y a 3 082 centièmes dans 30,82	$(30,82 = 3\ 082 \times 0,01)$

À retenir :

Lorsque l'on divise un nombre par 10, 100, ... chaque chiffre est décalé d'un rang vers la **droite**.

Chaque chiffre a une valeur 10, 100, ... fois plus petite.
Le chiffre des centièmes devient le chiffre des millièmes, ... , le chiffre des centaines devient le chiffre des dizaines, etc.

Lorsque l'on divise un nombre par 0,1 ; 0,01 ; ... chaque chiffre est décalé d'un rang vers la **gauche**.

Chaque chiffre a une valeur 10, 100, ... fois plus grande.
Le chiffre des centièmes devient le chiffre des dixièmes, ... , le chiffre des centaines devient le chiffre des milliers, etc.

Remarques

- Diviser par 10 revient à multiplier par 0,1
- Diviser par 0,1 revient à multiplier par 10
- Multiplier par 100 revient à diviser par 0,01
- Multiplier par 0,01 revient à diviser par 100

4 Propriétés

Propriété.
- La division n'est pas une opération commutative ;
- La division n'est pas une opération associative ;
- On ne peut **pas** diviser par 0.

En effet

Non commutative : $5 \div 2 = 2,5$ et $2 \div 5 = 0,4$

Non associative : $(30 \div 5) \div 10 = 0,6$ et $30 \div (5 \div 10) = 60$

Division par 0 : Imaginons que $10 \div 0$ soit possible, notons r le résultat : $10 \div 0 = r$.
Dans ce cas on a $r \times 0 = 10$ or $r \times 0 = 0$ donc c'est impossible.
r ne peut pas exister, donc on ne peut pas diviser par 0.