

COURS DE MATHÉMATIQUES

Chapitre n° 10 : Fractions 1^{ère} partie :
Égalité, simplification et comparaison

Niveau : Cinquième (Rappels) et Quatrième

Année scolaire

2024 - 2025

Notions abordées :

- Nombre rationnel : retour sur la définition d'un quotient,
- Égalité de quotients et comparaison,
- Égalité des produits en croix,
- Fraction d'une quantité.

Compétences évaluées :

- Comparer, ranger et encadrer des nombres rationnels,
- Savoir simplifier des fractions,
- Savoir utiliser l'égalité des produits en croix,
- Résoudre des problèmes avec des nombres rationnels.

Chapitre n° 10 : Fractions 1^{ère} partie : Égalité, simplification et comparaison

Table des matières

I	Rappel : notion de fraction	2
II	Fractions égales	2
III	Comparaison de fractions	3
IV	Égalité des produits en croix	4
V	Fraction d'une quantité	5

Chapitre n° 10 : Fractions 1^{ère} partie : Égalité, simplification et comparaison

I Rappel : notion de fraction



Définition :

Soit a et b deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$. La fraction $\frac{a}{b}$ est le **quotient** de a par b .
On dit que a est le **numérateur** et b le **dénominateur**.

$$\begin{array}{l} \text{numérateur} \quad \longrightarrow \quad \frac{a}{b} \\ \text{dénominateur} \quad \longrightarrow \quad b \end{array} = a \div b$$

De plus : $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b vaut a .

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

Exemples

$$\frac{3}{10} = 3 \div 10 = 0,3$$

$$\frac{17}{22} = 17 \div 22 \simeq 0,7728$$

$$\frac{3}{10} \times 10 = 3$$

$$\frac{17}{22} \times 22 = 17$$

REMARQUE

Certaines fractions ne sont **pas** des nombres décimaux.

II Fractions égales

PROPRIÉTÉ.

Un quotient ne change pas si on multiplie ou si on divise le numérateur **et** le dénominateur par un même nombre **non nul**.

Autrement dit, soient a , b et k trois nombres relatifs avec $k \neq 0$:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Démonstration.

Par définition on a : $\frac{a}{b} \times b = a$. D'où : $\frac{a}{b} \times b \times k = a \times k$ soit $\frac{a}{b} \times (b \times k) = (a \times k)$

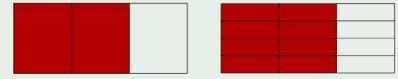
Ainsi : $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par $(b \times k)$ donne $(a \times k)$, c'est-à-dire $\frac{a \times k}{b \times k}$

Donc : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

Exemples

Les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{8}{12}$ sont égales. En effet : $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$

On peut illustrer ces deux fractions pour visualiser cette égalité :



Les fractions $\frac{20}{15}$ et $\frac{4}{3}$ sont égales. En effet : $\frac{20}{15} = \frac{20 \div 5}{15 \div 5} = \frac{4}{3}$

**Définition :**

Simplifier une fraction c'est utiliser la propriété ci-dessus afin d'obtenir des nombres plus petits au numérateur et au dénominateur.

Une fraction est **irréductible** lorsqu'elle est simplifiée au maximum.

Exemple

Pour simplifier la fraction $\frac{48}{30}$, on remarque que 48 et 30 sont divisibles par 6.

$$\frac{48}{30} = \frac{48 \div 6}{30 \div 6} = \frac{8}{5}$$

Ici on ne peut plus simplifier la fraction, elle est **irréductible**, elle est simplifiée au maximum.

On peut procéder en plusieurs étapes avant d'arriver à une fraction irréductible :

$$\frac{48}{30} = \frac{48 \div 2}{30 \div 2} = \frac{24}{15} = \frac{24 \div 3}{15 \div 3} = \frac{8}{5}$$

III Comparaison de fractions

PROPRIÉTÉ.

Soit a, b et c trois entiers relatifs avec $c > 0$. Si $a < b$ alors : $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Exemples

$$\frac{5}{14} < \frac{12}{14} \quad \underline{\text{car}} \quad 5 < 12$$

$$\frac{-6}{7} < \frac{3}{7} \quad \underline{\text{car}} \quad -6 < 3$$

$$\frac{-21}{37} < \frac{-11}{37} \quad \underline{\text{car}} \quad -21 < -11$$

REMARQUES

- Pour comparer des fractions, il faut qu'elles soient au même dénominateur.
- Si le numérateur d'une fraction est **supérieur** à son dénominateur alors cette fraction est **supérieure à 1**.
- Si le numérateur d'une fraction est **inférieur** à son dénominateur alors cette fraction est **inférieure à 1**.

Exemples

► On veut comparer $\frac{17}{8}$ et $\frac{7}{3}$: $\frac{17}{8} = \frac{17 \times 3}{8 \times 3} = \frac{51}{24}$ et $\frac{7}{3} = \frac{7 \times 8}{3 \times 8} = \frac{56}{24}$

Comme $51 < 56$ alors $\frac{51}{24} < \frac{56}{24}$

Donc : $\frac{17}{8} < \frac{7}{3}$

► On veut comparer $\frac{-18}{4}$ et $\frac{-23}{6}$: $\frac{-18}{4} = \frac{-18 \times 3}{4 \times 3} = \frac{-54}{12}$ et $\frac{-23}{6} = \frac{-23 \times 2}{6 \times 2} = \frac{-46}{12}$

Comme $54 < -466$ alors $\frac{-54}{12} < \frac{-46}{12}$

Donc : $\frac{-18}{4} < \frac{-23}{6}$

Remarque : On peut aussi mettre les deux fractions ci-dessus sur 24 pour les comparer.

► On veut comparer $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{5}$.

$2 < 3$ donc $\frac{2}{3} < 1$ et $7 > 5$ donc $\frac{7}{5} > 1$. Donc : $\frac{2}{3} < \frac{7}{5}$

IV Égalité des produits en croix

PROPRIÉTÉ. *Produits en croix*

Soit a , b , c et d des entiers relatifs avec $b, d \neq 0$.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors : $ad = bc$ Si $ad = bc$ alors : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

REMARQUE

On utilise généralement cette propriété pour vérifier si deux fractions sont égales.

Exemple

On souhaite vérifier si les fractions $\frac{20}{35}$ et $\frac{24}{42}$ sont égales.

On a : $20 \times 42 = 840$ et $24 \times 35 = 840$. Donc : $\frac{20}{35} = \frac{24}{42}$.

Remarque : On peut simplifier les fractions pour vérifier cette égalité.

$$\frac{20}{35} = \frac{20 \div 5}{35 \div 5} = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \frac{24}{42} = \frac{24 \div 6}{42 \div 6} = \frac{4}{7}$$

V Fraction d'une quantité

Exemples

- Dans une classe de 30 élèves les $\frac{4}{5}$ ont un téléphone. Combien sont-ils ?

1) On divise la quantité de départ par le dénominateur : $30 \div 5 = 6$ $\frac{1}{5}$ des élèves : 6 élèves

2) On multiplie le résultat précédent par le numérateur : $6 \times 4 = 24$.

24 élèves ont un téléphone portable dans cette classe.

- Dans le collège, il y a 600 élèves, 30% sont en 6^e. Combien y a-t-il de 6^e ?

1) $30\% = \frac{30}{100}$ $600 \div 100 = 6$

2) $6 \times 30 = 180$ Donc il y a 180 élèves en 6^e.