Cours de Mathématiques

Chapitre n° 9 : Arithmétique

Niveau : Troisième

Année scolaire

2024 - 2025

Notions abordées :

— Division euclidienne, multiples et diviseurs ;
— Déterminer les diviseurs d'un nombre ;
— Critères de divisibilités par 2, 3, 5 et 9 ;
— Nombres premiers, liste des nombres premiers ≤ 30 ;
— Décomposition en produit de facteurs premiers ;
— Simplification de fractions ;
— PGCD et problèmes de répartitions.

Compétences évaluées :

— Déterminer la liste des nombres premiers inférieurs à 100,
— Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers,
— Utiliser les nombres premiers inférieurs à 100 pour :
  — reconnaître et produire des fractions égales,
  — simplifier des fractions.
— Modéliser et résoudre des problèmes simples mettant en jeu les notions de divisibilité et de nombre premier.

Chapitre n° 9 : Arithmétique

Table des matières

Chapitre n° 9 : Arithmétique

I Division euclidienne

Définition : *Division euclidienne*

Soit a et b deux entiers positifs avec $b \neq 0$.

Effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver les deux entiers q et r tel que :

$$a = bq + r \qquad \text{avec } \; 0 \leq r < b$$

a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

$$\begin{array}{rr|cl} \text{dividende} \rightarrow & a & b & \leftarrow \text{diviseur} \\ \cline{3-3} & & q & \leftarrow \text{quotient} \\ & & & \\ \text{reste} \rightarrow & r & & \end{array}$$

Exemple

Effectuer la division euclidienne de 256 par 12 :

$$\begin{array}{rrrr|rr} & 2 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ \cline{5-6} - & 2 & 4 & & 2 & 1 \\ \cline{2-3} & & 1 & 6 & & \\ & - & 1 & 2 & & \\ \cline{3-4} & & & 4 & & \end{array}$$

$256 \;=\; 12 \times 21 + 4$ 21 est le quotient et 4 le reste $0 \leq 4 < 12$

II Multiples et diviseurs

1 Définition

Définition :

Soient a et b deux entiers positifs.

On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier positif k tel que $a = bk$.

Dans ce cas b et k sont des diviseurs de a.

On dit que a est divisible par b et k.

Exemples

27 est un multiple de 9 car $27 = 9 \times 3$.

9 et 3 sont des diviseurs de 27.

27 est divisible par 9 (et par 3).

60 est un multiple de 5 car $60 = 5 \times 12$.

5 et 12 sont des diviseurs de 60.

60 est divisible par 5 (et par 12).

Remarque : b est un diviseur de a si le reste de la division euclidienne de a par b est 0.

ATTENTION

Il ne faut pas confondre multiple et diviseur !

$$100 \underset{\text{est un \textbf{multiple} de}}{\overset{\text{est un \textbf{diviseur} de}}{\rightleftarrows}} 20$$

2 Critères de divisibilité

PROPRIÉTÉ. (admise)

- Si le chiffre des unités d'un nombre est 0, 2, 4, 6 ou 8, alors il est divisible par 2 ;
- Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3, alors il est est divisible par 3 ;
- Si les deux derniers chiffres d'un nombre forme un nombre divisible par 4 alors il est divisible par 4 ;
- Si un nombre se termine par 0 ou 5 alors il est divisible par 5 ;
- Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 9 alors il est divisible par 9 ;
- Si un nombre se termine par 0 alors il est divisible par 10.

Exemples

Divisible par 2 : $3\underline{4}$; $85\underline{6}$; $215\underline{0}$

Divisible par 3 : 315 $(3+1+5=9=3\times3)$; 5241 $(5+2+4+1=12=3\times4)$

Divisible par 4 : $6\underline{12}$ $(12=4\times3)$; 21 $8\underline{40}$ $(40=4\times10)$

Divisible par 5 : $6\underline{5}$; $35\underline{0}$; 10 $47\underline{5}$

Divisible par 9 : 855 $(8+5+5=18=9\times2)$; 631 854 $(6+3+1+8+5+4=27=9\times3)$

Divisible par 10 : $8\underline{0}$; $96\underline{0}$; 97 $82\underline{0}$

PROPRIÉTÉ.

- Tous les nombres sont divisibles par 1.
- Un nombre est toujours divisible par lui même.

III Nombres premiers

Introduction

▶ Déterminons la liste des diviseurs des nombres suivants :

20 : 1, 2, 4, 5, 10 et 20 **21 :** 1, 3, 7 et 21

48 :1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16 24 et 48 **100 :** 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 et 100

5 : 1 et 5 **13 :** 1 et 13 **23 :** 1 et 23 **29 :** 1 et 29

• Que peut-on remarquer pour certains de ces nombres ?

→ Certains ne possèdent que deux diviseurs.

1 Définition

Définition :
Un nombre premier est un entier positif qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs : 1 et lui-même.

Théorème d'Euclide *(admis)*

Il existe une infinité de nombres premiers.

2 Crible d'Eratosthène

Pour déterminer les nombres premiers, on commence par barrer le 1 qui n'est pas premier.

2 est premier, on l'entoure et on barre tous les multiples de 2.

Le premier nombre non barré après 2 est 3.
3 est premier, on l'entoure et on barre tous les multiples de 3.

Le premier nombre non barré après 3 est 5.
5 est premier, on l'entoure et on barre tous les multiples de 5.

On continue ainsi de suite.
Ce procédé, appelé crible d'Eratosthène permet de déterminer les nombres premiers.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Nombres premiers inférieurs à 100

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	

3 Décomposition en facteurs premiers

Propriété. (admise)
Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Exemple

Décomposition de 84 en produit de facteurs premiers :
On cherche les diviseurs premiers de 84 dans l'ordre croissant :

84 est divisible par 2	$84 = 2 \times 42$
42 est divisible par 2	$84 = 2 \times 2 \times 21$
21 est divisible par 3	$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

7 est premier donc la décomposition est terminée, on écrit : $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

Exemple

Décomposition de 1600 en produit de facteurs premiers. On décompose jusqu'à obtenir uniquement des nombres premiers :

$1600 = 16 \times 100 = 4 \times 4 \times 25 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 = 2^6 \times 5^2$

IV Simplification de fractions

Remarque

Décomposer le numérateur et le dénominateur d'une fraction en produit de facteurs premiers permet de la simplifier rapidement.

Exemple

Simplifier la fraction $\dfrac{140}{105}$

On décompose 140 et 105 en, produit de facteurs premiers : $\dfrac{140}{105} = \dfrac{2 \times 2 \times \cancel{5} \times \cancel{7}}{3 \times \cancel{5} \times \cancel{7}} = \dfrac{2 \times 2}{3} = \dfrac{4}{3}$

V PGCD

1 Définition

Définition :

Le PGCD (**P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur) de deux nombres entiers (non nuls) est le plus grand entier qui les divise simultanément.

On note $PGCD(a\ ;\ b)$ le PGCD de deux entiers non nuls a et b.

Remarque : On peut déterminer le $PGCD$ en faisant la liste des diviseurs ou bien en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

Exemples

1) Déterminer le PGCD de 38 et de 57.

Diviseurs de 38 : 1 ; 2 ; 19 ; 38 Diviseurs de 57 : 1 ; 3 ; 19 ; 57

Ainsi : $PGCD(38\ ;\ 57) = 19$

---

2) Déterminer le PGCD de 24 et de 156.

On décompose en produit de facteurs premiers et on identifie les facteurs communs aux décompositions.

$24 = 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$156 = 2 \times 78 = 2 \times 2 \times 39 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$

$PGCD(24\ ;\ 156) = 2 \times 2 \times 3 = 12$

2 Problèmes de répartition

Exemple

Un fleuriste souhaite réaliser le plus de bouquets identiques en utilisant :

- 90 Lys ; - 660 roses ; - 450 jonquilles.

On cherche le PGCD de 90, 660 et 450.

Décomposition en produit de facteurs premiers :	On regroupe les facteurs en commun :
$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$	$90 = 30 \times 3$
$660 = 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 11$	$660 = 30 \times 22$
$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$	$450 = 30 \times 15$

Il pourra donc réaliser 30 bouquets composés chacun de 3 Lys, 22 roses et 15 jonquilles.