Chapitre n° 9 : Arithmétique

I Division euclidienne

Définition : *Division euclidienne*

Soit a et b deux entiers positifs avec $b \neq 0$.

Effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver les deux entiers q et r tel que :

$$a = bq + r \qquad \text{avec} \quad 0 \leq r < b$$

a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

$$\begin{array}{r r|l l}
\text{dividende} \rightarrow & a & b & \leftarrow \text{diviseur} \\
\cline{3-3}
 & & q & \leftarrow \text{quotient} \\
 & & & \\
\text{reste} \rightarrow & r & &
\end{array}$$

Exemple

Effectuer la division euclidienne de 256 par 12 :

II Multiples et diviseurs

1 Définition

Définition :

Soient a et b deux entiers positifs.

On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier positif k tel que $a = bk$.

Dans ce cas b et k sont des diviseurs de a.

On dit que a est divisible par b et k.

Exemples

Remarque : b est un diviseur de a si le reste de la division euclidienne de a par b est 0.

ATTENTION

Il ne faut pas confondre multiple et diviseur !

$$100 \underset{\text{est un } \textbf{multiple} \text{ de}}{\overset{\text{est un } \textbf{diviseur} \text{ de}}{\rightleftarrows}} 20$$

2 Critères de divisibilité

PROPRIÉTÉ. (admise)

- Si le chiffre des unités d'un nombre est 0, 2, 4, 6 ou 8, alors il est divisible par 2 ;
- Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3, alors il est est divisible par 3 ;
- Si les deux derniers chiffres d'un nombre forme un nombre divisible par 4 alors il est divisible par 4 ;
- Si un nombre se termine par 0 ou 5 alors il est divisible par 5 ;
- Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 9 alors il est divisible par 9 ;
- Si un nombre se termine par 0 alors il est divisible par 10.

Exemples

Divisible par 2 : ....

Divisible par 3 : ....

Divisible par 4 : ....

Divisible par 5 : ....

Divisible par 9 : ....

Divisible par 10 : ....

PROPRIÉTÉ.

- Tous les nombres sont divisibles par 1.
- Un nombre est toujours divisible par lui même.

III Nombres premiers

Introduction

▶ Déterminons la liste des diviseurs des nombres suivants :

20 : .... **21 :** ....

48 : .... **100 :** ....

5 : .... **13 :** .... **23 :** .... **29 :** ....

• Que peut-on remarquer pour certains de ces nombres ?

....

1 Définition

Définition :

Un nombre premier est un entier positif qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs : 1 et lui-même.

Théorème d'Euclide *(admis)*

Il existe une infinité de nombres premiers.

2 Crible d'Eratosthène

Pour déterminer les nombres premiers, on commence par barrer le 1 qui n'est pas premier.

2 est premier, on l'entoure et on barre tous les multiples de 2.

Le premier nombre non barré après 2 est 3.
3 est premier, on l'entoure et on barre tous les multiples de 3.

Le premier nombre non barré après 3 est 5.
5 est premier, on l'entoure et on barre tous les multiples de 5.

On continue ainsi de suite.
Ce procédé, appelé crible d'Eratosthène permet de déterminer les nombres premiers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Nombres premiers inférieurs à 100

----

3 Décomposition en facteurs premiers

Propriété. (admise)
Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Exemple

Décomposition de 84 en produit de facteurs premiers :
On cherche les diviseurs premiers de 84 dans l'ordre croissant :

Exemple

Décomposition de 1600 en produit de facteurs premiers. On décompose jusqu'à obtenir uniquement des nombres premiers :

IV Simplification de fractions

REMARQUE

Décomposer le numérateur et le dénominateur d'une fraction en produit de facteurs premiers permet de la simplifier rapidement.

Exemple

Simplifier la fraction $\frac{140}{105}$

On décompose 140 et 105 en, produit de facteurs premiers :

V PGCD

1 Définition

Définition :

Le PGCD (**P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur) de deux nombres entiers (non nuls) est le plus grand entier qui les divise simultanément.

On note $PGCD(a\ ;\ b)$ le PGCD de deux entiers non nuls a et b.

Remarque : On peut déterminer le *PGCD* en faisant la liste des diviseurs ou bien en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

Exemples

1) Déterminer le PGCD de 38 et de 57.

Diviseurs de 38 : Diviseurs de 57 :

Ainsi :

2) Déterminer le PGCD de 24 et de 156.

On décompose en produit de facteurs premiers et on identifie les facteurs communs aux décompositions.