Cours de Mathématiques

Chapitre n° 13 : Probabilités

Niveau : Troisième

Année scolaire

2022- 2023

Notions abordées :

— Probabilités, vocabulaire associé (issue, évènement, ...) ;

— Calculs de probabilités ;

— Loi (faible) des grands nombres.

Compétences évaluées :

— Calculer des probabilités pour des expériences aléatoires simples à une ou deux épreuves ;

— Reconnaître des évènements particuliers (certains, impossible, ...)

Chapitre n° 13 : Probabilités

Table des matières

Chapitre n° 13 : Probabilités

I Définitions

Définition : *Expérience aléatoire*

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne **peut pas** prévoir le résultat à l'avance.

Définition : *Issue*

Les différents résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés issues.

Définition : *Univers*

L'univers associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues pouvant être obtenues au cours de cette expérience.

Il est généralement noté Ω.

Définition : *Évènement*

Un événement lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble des résultats possibles de cette expérience. C'est-à-dire un sous ensemble de l'univers Ω.

Plus simplement, un évènement est une « situation » pouvant se produire ou non lors d'une expérience aléatoire.

Exemples

On considère un dé non pipé à 6 faces, on lance ce dé et on regarde le nombre que l'on obtient.

L'évènement P : « Obtenir un nombre pair » se produit avec les issues 2, 4 et 6. $P = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$.

L'évènement T : « Obtenir un multiple de trois » se produit avec les issues 3 et 6. $T = \{3\ ;\ 6\}$.

Définition : *Évènement élémentaire*

Un événement élémentaire un sous-ensemble de l'univers (un évènement) constitué d'un seul élément.

Exemples

Dans un jeu de carte classique de 52 cartes l'évènement « Tirer le roi de cœur » est un événement élémentaire. En effet, le paquet de carte ne contient qu'un seul roi de cœur.

Dans un sac, il y a 26 jetons, indiscernables au toucher, sur lesquels sont écrites les 26 lettres de l'alphabet. On en tire un au hasard.

- L'évènement R : « Tirer la lettre r » se produit avec l'issue r.

$$R = \{r\}$$

C'est un évènement élémentaire le sous-ensemble R contient un seul élément.

-L'évènement V : « Tirer une voyelle » se produit avec les issues, a, e, i, o, u et y.

$$V = \{a\ ;\ e\ ;\ i,\ ;\ o\ ;\ u\ ;\ y\}$$

Ce n'est pas un évènement élémentaire, ce sous-ensemble V contient 6 éléments.

II Calcul de probabilités

Définition : *Probabilité d'une issue*

La probabilité d'une issue est un nombre compris **entre 0 et 1** qui s'interprète comme la chance d'obtenir cette issue.

Définition :

Si **toutes les issues** d'une expérience aléatoire ont la même probabilité alors on dit que l'expérience est équiprobable ou que l'on est dans une situation d'équiprobabilité.

REMARQUE :

La probabilité peut s'exprimer en pourcentage

.

PROPRIÉTÉ.

La somme des probabilités de toutes les issues possibles vaut 1.

Exemple

On considère un dé non pipé à 6 faces, on lance ce dé et on regarde le nombre que l'on obtient.

La probabilité d'obtenir le nombre 2 est $\frac{1}{6} \simeq 0,167$ On a bien $0 \leqslant \frac{1}{6} \leqslant 1$.

Cela correspond à environ $16,7\%$ de chance d'obtenir le nombre 2.

Chacune des 6 faces a une probabilité d'être obtenue de $\frac{1}{6}$. On a bien $6 \times \frac{1}{6} = 1$.

Définition : *Probabilité d'un évènement*

La probabilité d'un évènement A est égale à la somme des probabilités des issues qui le produisent.

PROPRIÉTÉ. *Calcul de probabilité dans une situation d'équiprobabilité*

La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des issues qui le produisent.
En pratique on trouve la probabilité d'un évènement A de cette manière :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}}$$

Exemple

Calculons la probabilité de l'évènement I : « Obtenir un nombre impair ».

L'évènement I se produit avec les issues 1, 3 et 5, chacune de ces issues a une probabilité de $\frac{1}{6}$.

$$\underline{\text{Ainsi :}}\ P(I) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

REMARQUE

En général on doit simplifier les fractions mais en probabilité il est parfois intéressant de les laisser comme elles sont.

PROPRIÉTÉ. *Loi faible des grands nombres* (admise)

Si on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue devient proche de sa probabilité.

Exemple

À l'aide d'un tableur on simule plusieurs lancés d'un dé à 6 faces. Le tableur permet de générer un nombre aléatoire, entre 1 et 6, grâce à la commande **=ALEA.ENTRE.BORNES(1 ;6)**

30 Lancers		
Issue	Nombre D'apparitions	Fréquence (%)
1	4	13,33
2	3	10,00
3	5	16,67
4	6	20,00
5	11	36,67
6	1	3,33
	Différence entre Max et min	33,33

500 Lancers		
Issue	Nombre D'apparitions	Fréquence (%)
1	74	14,80
2	81	16,20
3	84	16,80
4	80	16,00
5	94	18,80
6	87	17,40
	Différence entre Max et min	4,00

1000 Lancers		
Issue	Nombre D'apparitions	Fréquence (%)
1	153	15,300
2	161	16,100
3	172	17,200
4	165	16,500
5	185	18,500
6	162	16,200
	Différence entre Max et min	3,20

5000 Lancers		
Issue	Nombre D'apparitions	Fréquence (%)
1	842	16,84
2	812	16,24
3	832	16,64
4	812	16,24
5	860	17,20
6	842	16,84
	Différence entre Max et min	0,96

10000 Lancers		
Issue	Nombre D'apparitions	Fréquence (%)
1	1664	16,64
2	1685	16,85
3	1630	16,30
4	1650	16,50
5	1655	16,55
6	1715	17,15
	Différence entre Max et min	0,85

25000 Lancers		
Issue	Nombre D'apparitions	Fréquence (%)
1	4221	16,884
2	4147	16,588
3	4163	16,652
4	4132	16,528
5	4182	16,728
6	4155	16,620
	Différence entre Max et min	0,36

Plus le nombre de lancé est important, plus les fréquences d'apparition de chaque issue se rapprochent de la probabilité théorique qui est de $\dfrac{1}{6} \simeq 16,7\%$

III Évènements particuliers

Définition : *Évènement contraire*

Soit A un évènement.

L'événement contraire de A est l'événement qui se produit avec toutes les issues **qui ne produisent pas** A. On le note $\bar{A}$.

Propriété. *Probabilité de l'évènement contraire*

Soit A un évènement, on a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple

On considère un dé non pipé à 6 faces, on lance ce dé et on regarde le nombre que l'on obtient.

On note T l'évènement « Obtenir un multiple de trois ». Il se produit avec les issues 3 et 6.

Ainsi $\bar{T}$ est l'évènement « Ne pas obtenir un multiple de 3 ». Il se produit avec les issues 1, 2, 4 et 5.

$$\underline{\text{On a :}}\ P(T) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad \underline{\text{d'où}} \qquad P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Définition :

On dit que deux évènements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.

On dit qu'un évènement est certain si toutes les issues le produisent (il se produit à coup sûr).

On dit qu'un évènement est impossible si aucune issue ne le produit (il ne se produit jamais).

Remarque

Soit A un évènement. A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

Propriété.

Soit A un évènement certain, alors : $P(A) = 1$. Soit B un évènement impossible, alors : $P(B) = 0$.

Exemples

On considère un dé non pipé à 6 faces, on lance ce dé et on regarde le nombre que l'on obtient.

On note D l'évènement « Obtenir 2 » et T « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 ».
Les évènements D et T sont **incompatibles**.

On ne peut pas obtenir 2 et obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 en même temps.

L'évènement S : « Obtenir un nombre inférieur à 7 » est **certain**.

Chacune des issues 1, 2, 3, 4, 5 et 6 le produit : $P(S) = 1$.

L'évènement N : « Obtenir un nombre plus grand que 9 » est **impossible**.

Aucune des issues 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ne le produit : $P(N) = 0$.