Cours de Mathématiques

Chapitre n° 14 : Fonction linéaire et fonction affine

Niveau : Troisième

Année scolaire

2024 - 2025

Notions abordées :

— Fonction linéaire, vocabulaire, représentation ;
— Proportionnalité et fonction linéaire ;
— Fonction affine, vocabulaire et représentation ;

Compétences évaluées :

— Représenter graphiquement une fonction linéaire, une fonction affine ;
— Déterminer l'expression d'une fonction affine ou linéaire ;
— Modéliser une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire ;
— Reconnaître graphiquement une fonction linéaire ou affine.

Chapitre n° 14 : Fonction linéaire et fonction affine

Table des matières

Chapitre n° 14 : Fonction linéaire et fonction affine

I Fonction linéaire

1 Définition

Définition : *Fonction linéaire*

Soit a un nombre fixé.

La fonction linéaire de coefficient a est la fonction f qui a tout nombre x associe le nombre ax.

$$f : x \longmapsto ax$$

a est appelé coefficient de linéarité.

Exemples

- $f : x \longmapsto 5x$ est une fonction linéaire de coefficient $a = 5$. (table de 5 !)
- $g : x \longmapsto \dfrac{-4}{7}x$ est une fonction linéaire de coefficient $a = \dfrac{-4}{7}$.
- $f : x \longmapsto 12x + 4$ n'est **pas** une fonction linéaire.

2 Image et antécédent

Propriété.

Soit f une fonction linéaire de coefficient a alors : $f(1) = a$

Exemple

Soit h la fonction définie par $h : x \longmapsto 12x$.

On a : $h(1) = 12 \times 1 = 12$

▶ Déterminer l'antécédent de 30 par la fonction h.

On cherche un nombre x tel que $f(x) = 30$

C'est-à-dire $12x = 30$. On résout : $\dfrac{12x}{12} = \dfrac{30}{12}$ $x = 2,5$

Tableau de valeurs

Complétons le tableau de valeurs de la fonction $f : x \longmapsto 3x$.

x	-5	-2	0	1	4	7
$f(x)$	-15	-6	0	3	12	21

$\div 3$ $\times 3$

On remarque qu'il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

À toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire (et inversement).

Exemple

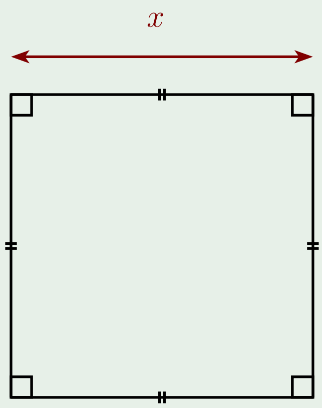
Soit x un nombre positif.
Un carré de côté x cm a un périmètre de longueur $4x$ cm.

On peut modéliser cette situation avec la fonction $p : x \longmapsto 4x$.

Il s'agit bien d'une situation de proportionnalité, si la longueur x double alors le périmètre double aussi.

$p(10) = 4 \times 10 = 40$

Cela signifie qu'à carré de côté 10 cm a un périmètre de 40 cm



3 Représentation graphique

Définition :
La représentation graphique de la fonction linéaire $x \longmapsto ax$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ ax)$.

Propriété.
La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto ax$ est la droite (OA) où O est l'origine du repère et A le point de coordonnées $(1\ ;\ a)$.

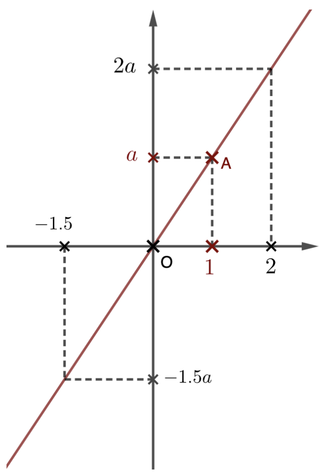
Remarques

- Il suffit de 2 points pour tracer une droite : l'image de 0 est toujours 0 et celle de 1 est toujours a.

- Une situation de proportionnalité pouvant être associée à une fonction linéaire, on explique ainsi pourquoi la représentation graphique d'une situation de proportionnalité est une droite passant par l'origine.

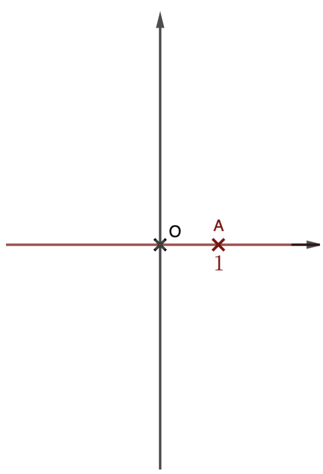
Définition : *Coefficient directeur*
On dit que le nombre a est le coefficient directeur de la droite (OA).

$a > 0$



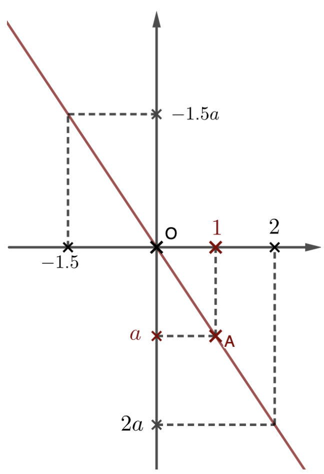
La droite (OA) « monte ».

$a = 0$



La droite (OA) est confondue avec l'axe des abscisses

$a < 0$



La droite (OA) « descend ».

4 Déterminer l'expression d'une fonction linéaire

Exemples

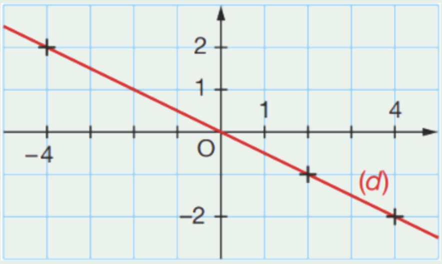
- Déterminer l'expression de la fonction linéaire f telle que $f(6) = 10,8$. On cherche le coefficient a

On a : $f(6) = 10,8$ C'est-à-dire $6a = 10,8$ On résout : $\dfrac{6a}{6} = \dfrac{10,8}{6}$ $x = \dfrac{9}{5}(= 1,8)$

Donc : f est la fonction linéaire définie par $f : x \longmapsto \dfrac{9}{5}x$

- Déterminer l'expression de la fonction h représentée par la droite (d).

Sur le graphique on peut lire les coordonnées suivantes $(4; -2)$.



On a : $h(4) = -2$ C'est-à-dire $4a = -2$

On résout : $\dfrac{4a}{4} = \dfrac{-2}{4}$ $a = \dfrac{-1}{2}(= -0,5)$

Donc : h est la fonction linéaire définie par $h : x \longmapsto \dfrac{-1}{2}x$

Propriété.

Soit f une fonction linéaire alors pour tout nombre x non nul on a : $a = \dfrac{f(x)}{x}$

Exemples

On reprend les deux points de l'exemple précédent.

- On a : $f(6) = 10,8$ Donc : $a = \dfrac{f(6)}{6} = \dfrac{10,8}{6} = \dfrac{9}{5}$
- On a : $h(4) = -2$ Donc : $a = \dfrac{h(4)}{4} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

II Fonction affine

1 Définition

Définition : *Fonction affine*

Soit a et b deux nombres fixés.

On appelle fonction affine toute fonction f qui à tout nombre x associe le nombre $ax + b$.

$$f : x \longmapsto ax + b$$

a est appelé coefficient directeur et b ordonnée à l'origine.

Exemples

- $f : x \longmapsto 7x + 12$ fonction affine de coefficient directeur $a = 7$ et d'ordonnée à l'origine $b = 12$.
- $g : x \longmapsto -5x - 8$ fonction affine de coefficient directeur $a = -5$ et d'ordonnée à l'origine $b = -8$.

Remarques

- Si $b=0$ alors on retrouve une fonction linéaire.
Les fonctions linéaires sont donc des cas particuliers de fonctions affines.
- Si $a=0$ alors on retrouve une fonction constante.
- Si $a=b=0$ alors on retrouve la fonction *nulle*.

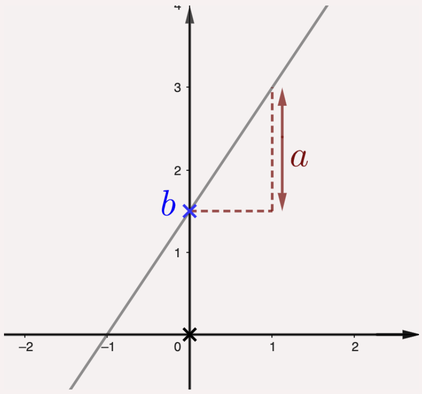
2 Représentation graphique

Définition :
La représentation graphique de la fonction linéaire $x \longmapsto ax+b$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ ax+b)$.

Propriété.
Soit f une fonction affine de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b.
Alors : b est l'image de 0 par la fonction f. C'est-à-dire : $f(0)=b$.

Propriété.
Si une fonction est affine, alors sa représentation graphique est une droite.

Réciproquement : Si la représentation graphique d'une fonction est une droite, alors cette fonction est affine.



Remarque

Comme pour une fonction linéaire, le coefficient directeur a nous dit de combien on monte (ou de combien on descend) à chaque fois que l'on se déplace d'une unité.

Propriété.
Soit f une fonction affine de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b.
Pour tous nombres x_1 et x_2 tels que $x_1 \neq x_2$ on a : $a=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

Démonstration.

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= (ax_1+b) - (ax_2+b) \\ &= ax_1 \cancel{+b} - ax_2 \cancel{-b} \\ &= ax_1 - ax_2 \\ &= a(x_1-x_2) \end{aligned}$$

Donc : $f(x_1)-f(x_2)=a(x_1-x_2)$ **(*)**

Comme : $x_1 \neq x_2$

Alors : $x_1-x_2 \neq 0$

*On peut donc diviser par x_1-x_2 dans **(*)***

Donc : $a=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

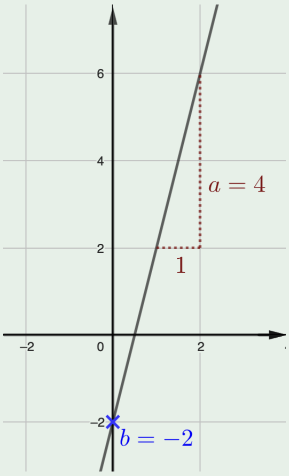
Remarque

Comme pour les fonctions linéaires, le coefficient a donne la direction de la droite (elle monte ou bien elle descend.

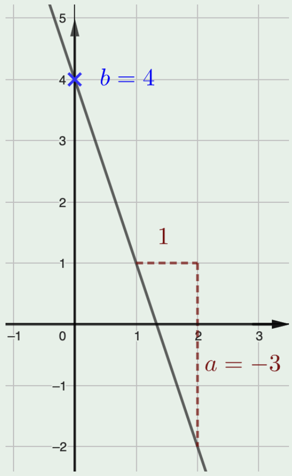
L'ordonnée à l'origine b indique que la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0\ ;\ b)$.

Exemple

$f:\ x \longmapsto 4x-2$



$f:\ x \longmapsto -3x+4$



3 Déterminer l'expression d'une fonction linéaire

Exemple

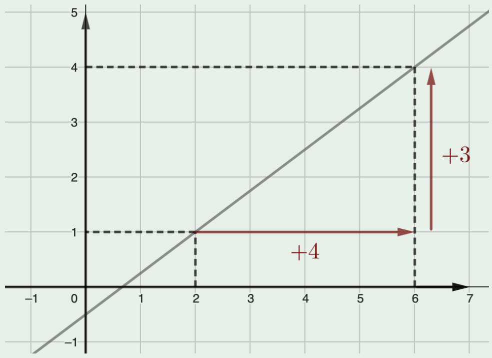
Déterminer l'expression de la fonction f représentée ci-contre.

On peut lire que $f(0) = -0,5$. Donc : $b = -0,5$

Déterminons le coefficient directeur :

On lit : $f(2) = 1$ et $f(6) = 4$

$a = \dfrac{f(6)-f(2)}{6-2} = \dfrac{4-1}{6-2} = \dfrac{3}{4}$ Donc : $f:\ x \longmapsto \dfrac{3}{4}x - 0,5$



Exemple

Soit g une fonction affine telle que $g(-3) = -9$ et $g(4) = 5$.
Déterminer l'expression de cette fonction.

Déterminons le coefficient directeur : $a = \dfrac{g(4)-g(-3)}{4-(-3)} = \dfrac{5-(-9)}{4-(-3)} = \dfrac{14}{7} = 2$

Donc : $g:\ x \longmapsto 2x+b$. On cherche l'ordonnée à l'origine.

On sait que : $g(4) = 5$ Soit : $2\times 4 + b = 5$ On résout : $8 + b - 8 = 5 - 8$ Ainsi : $b = -3$

Donc : $g : x \longmapsto 2x - 3$